Современные УМК издательства «Просвещение» предметной области «Математика» в условиях введения и реализации требований ФГОС ОО

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Нормативно-правовая основа

Издательство «Просвещение» предлагает новый подход к комплексному оснащению образовательных организаций, основой которому послужили:

Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»	Федеральный закон Российской Федерации от 5 апреля 2013 г. №44-ФЗ "О контрактной системе в сфере закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд"	Федеральные государственные образовательные стандарты ДО, НОО, ООО, СОО	Приказ Минобрнауки РФ от 23 июля 2013 г. N 611 «Об утверждении Порядка формирования и функционирования инновационной инфраструктуры в системе образования»	Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы (СанПиН 2.4.1. 3049-13)

Переработка учебников под ФГОС

Содержательная переработка

Приведение основного **содержания** учебников в полное соответствие с **фундаментальным ядром**, обновление и актуализация содержания, дополнение текста учебника **ссылками** на дополнительные ресурсы, в т.ч. сети Интернет

Методическая переработка

Доработка методического и дидактического аппарата учебников с целью усиления возможностей для реализации при работе с учебником **системно-деятельностного подхода**

Дизайнерская переработка

Переработка макетов учебников с учётом возрастных особенностей школьников и при использовании современных полиграфических возможностей. В новые цветные макеты включено большое количество **цветных иллюстраций**, разработана **специальная навигационная система**

Функциональная переработка

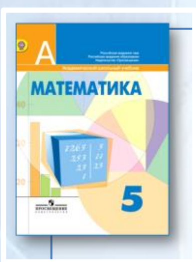
Переработка учебников с позиций превращения их из единственного и самодостаточного источника информации по предмету в основу – **ядро ИОС**, неотъемлемой частью которой являются **традиционные и инновационные компоненты**

Основное общее образование

5-6 классы

Линия УМК «Сферы»
Математика. 5-6 класс
1.2.3.1.2.1 -2

Линия УМК
«МГУ – школе»
С. М. Никольского и др.
5-6 классы
1.2.3.1.12.1-2



Линия УМК
под редакцией
Дорофеева Г. В
1.2.3.1.5.1-2

Наглядная геометрия

Линия УМК
Т. Г. Ходот и др.
5-6 классы

Линия
В. А. Панчищиной и др.
5-6 классы

www.prosv.ru www.spheres.ru

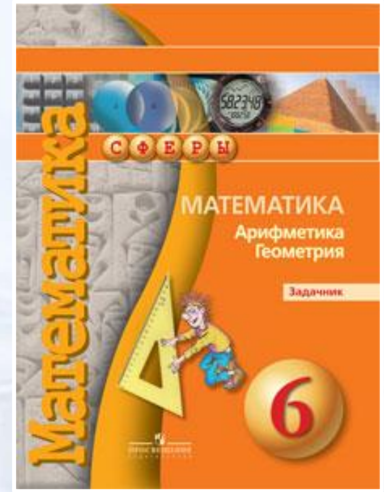
МЕЖПРЕДМЕТНАЯ ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СРЕДА «СФЕРЫ»

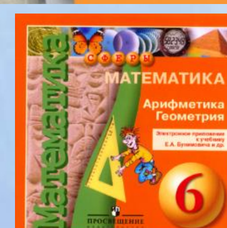
- Рабочая программа
- Учебник с электронным приложением (5-6 кл.)
- Тетрадь-тренажер
- Задачник
- Тетрадь-экзаменатор
- Поурочные методические рекомендации

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

www.prosv.ru www.spheres.ru

Методический шлейф УМК «Сферы. Математика 5-6»





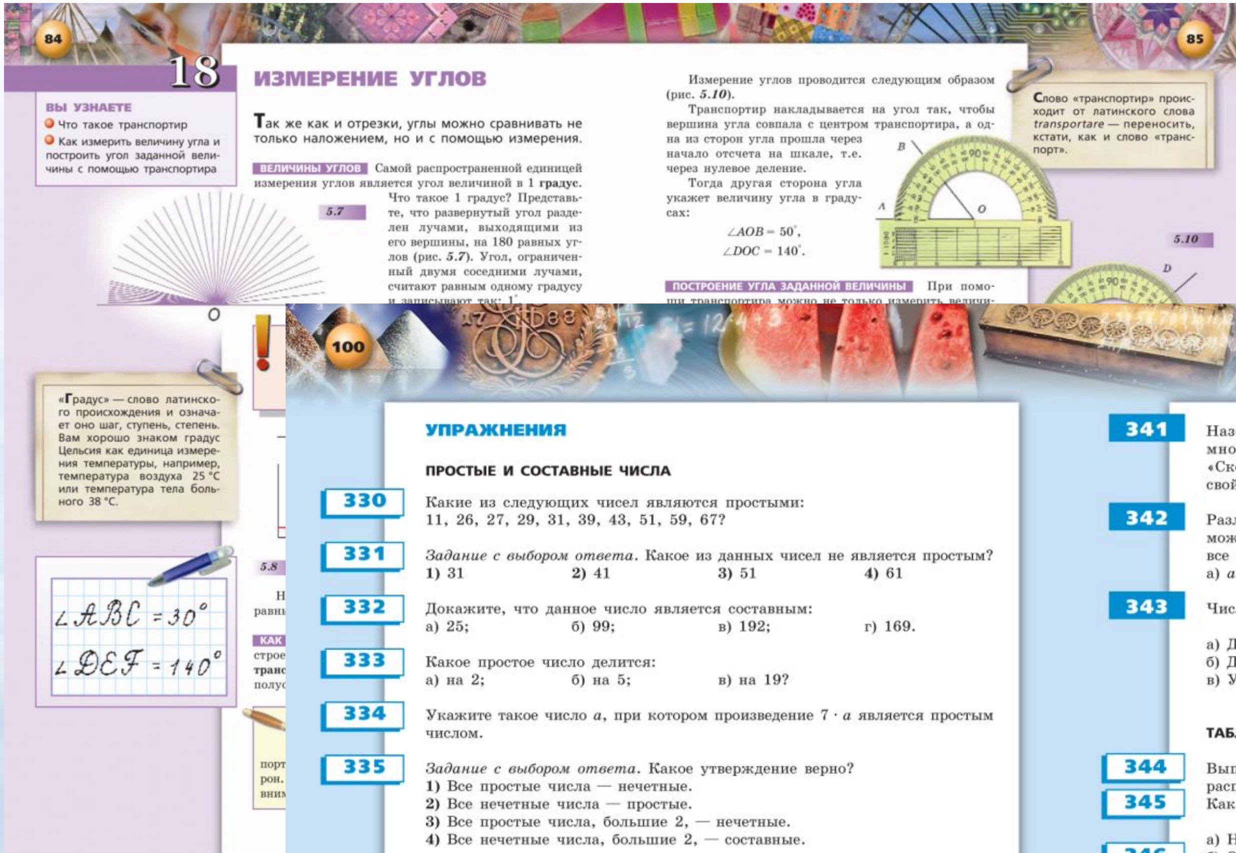
МАТЕМАТИКА.
АРИФМЕТИКА.
ГЕОМЕТРИЯ
5 КЛАСС

МАТЕМАТИКА.
АРИФМЕТИКА.
ГЕОМЕТРИЯ
6 КЛАСС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

www.prosv.ru

www.spheres.ru



УПРАЖНЕНИЯ

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

330 Какие из следующих чисел являются простыми:
11, 26, 27, 29, 31, 39, 43, 51, 59, 67?

331 *Задание с выбором ответа.* Какое из данных чисел не является простым?
1) 31 **2)** 41 **3)** 51 **4)** 61

332 Докажите, что данное число является составным:
а) 25; б) 99; в) 192; г) 169.

333 Какое простое число делится:
а) на 2; б) на 5; в) на 19?

334 Укажите такое число a, при котором произведение $7 \cdot a$ является простым числом.

335 *Задание с выбором ответа.* Какое утверждение верно?
1) Все простые числа — нечетные.
2) Все нечетные числа — простые.
3) Все простые числа, большие 2, — нечетные.
4) Все нечетные числа, большие 2, — составные.

336 а) Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
б) Может ли произведение двух простых чисел быть простым числом?

337 1) Найдите:
а) НОД (3; 5) и НОК (3; 5); в) НОД (2; 11) и НОК (2; 11);
б) НОД (5; 7) и НОК (5; 7); г) НОД (11; 13) и НОК (11; 13).
2) Известно, что числа m и n простые. Найдите:
а) НОД (m; n); б) НОК (m; n).

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

338 Дано разложение на простые множители числа 420: $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Ответьте на вопросы:
1) Сколько простых множителей содержится в разложении?
2) Есть ли в разложении одинаковые множители?
3) Почему в разложении нет числа 1?

339 Разложите на простые множители числа:
а) 30, 70, 42, 110; в) 10, 100, 1000, 10000;
б) 16, 48, 36, 63; г) 90, 990, 630.

340 Разложите на простые множители число, равное произведению:
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10.$$

341 Назовите все двузначные числа, меньшие 30, разложение на простые множители которых содержит только два различных множителя. «Сконструируйте» несколько трехзначных чисел, обладающих таким же свойством. Сколько делителей имеет каждое из них?

342 Разложение числа на простые множители — это его «паспорт». Из него можно узнать много полезных сведений о данном числе, например, найти все его делители. Найдите все делители числа a, если:
а) $a = 3 \cdot 7$; б) $a = 2 \cdot 11 \cdot 17$; в) $a = 3^2 \cdot 5$.

343 Число разложили на простые множители и получили такое произведение:
$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2.$$
а) Делится ли это число на 10? на 100? на 1000?
б) Делится ли это число на 18? на 70?
в) Узнайте, какое число было разложено на простые множители.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

344 Выполните задания 344 — 348, используя таблицу *простых чисел*, расположенную на странице 221.

345 Какие из чисел 163, 261, 271, 447, 457, 758 являются простыми?

346 а) Найдите первое трехзначное число, являющееся простым.
б) Определите, сколько простых чисел в третьей сотне.

347 Среди двузначных простых чисел, записанных разными цифрами, есть такие, которые остаются простыми после перестановки цифр. Запишите все такие числа.

348 Составьте все возможные трехзначные числа из цифр 1, 2 и 7 (без повторения цифр). Какие из них являются простыми и какие — составными?

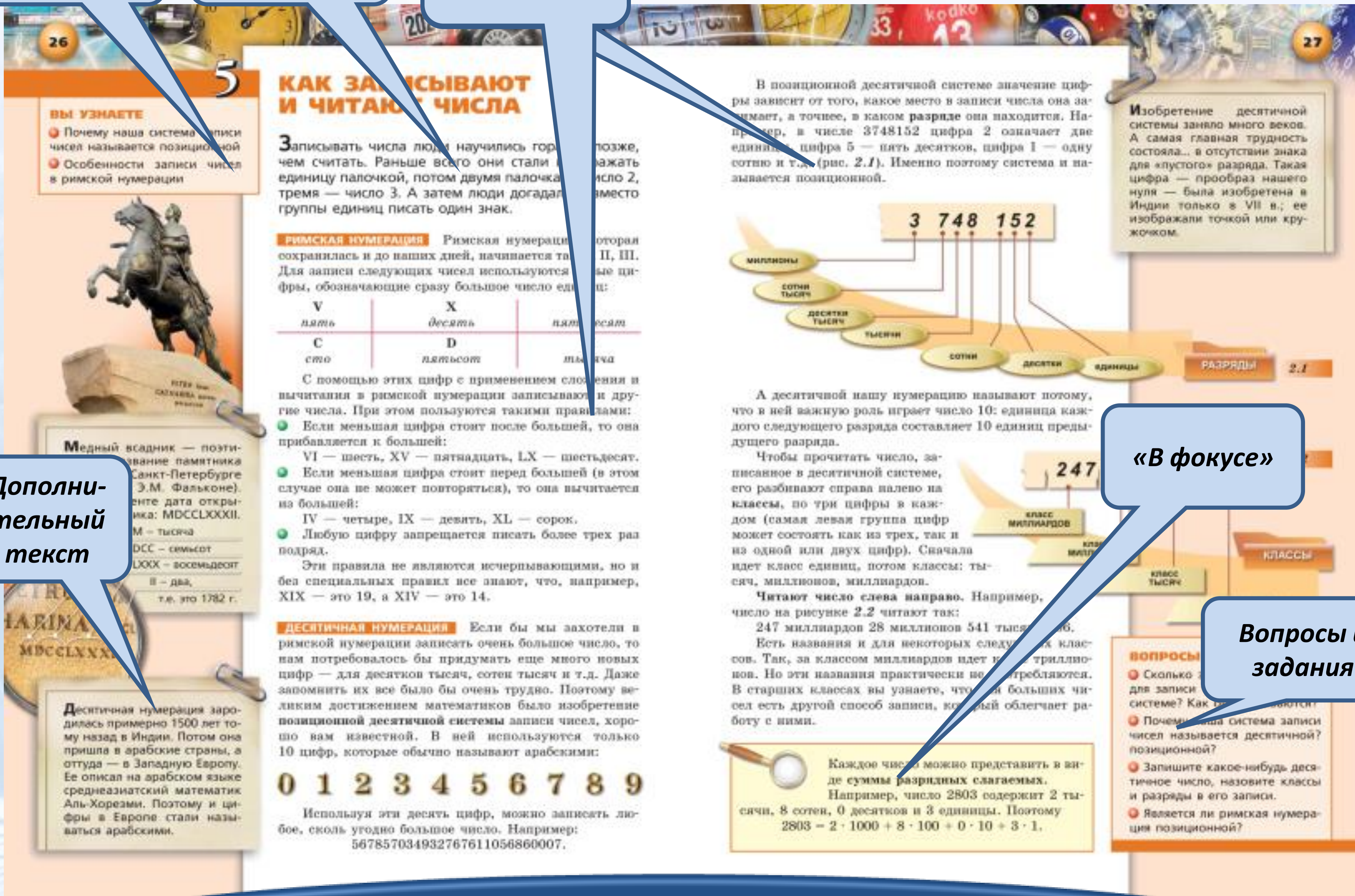
Простые числа, разность которых равна 2, называют близнецами. Сколько пар простых чисел-близнецов в ряду чисел:
а) от 1 до 100; б) от 100 до 200?
Проверьте, есть ли числа-близнецы в промежутке от 900 до 1000.

349 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
1) Как известно, простое число имеет два делителя. А сколько делителей имеет квадрат простого числа? куб простого числа? четвертая степень простого числа? Выясните это на конкретных примерах.
2) Как вы думаете, сколько делителей имеет пятая степень простого числа? шестая степень? десятая степень?
3) Перечислите все делители числа 3125; числа 64.
Подсказка. $3125 = 5^5$, $64 = 2^6$.

Вы узнаете

Вступление

Основной текст



Дополни-тельный текст

«В фокусе»

Вопросы и задания

С Ф Е Р Ы

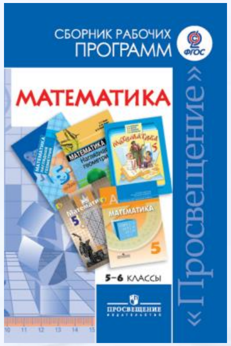
Интернет-поддержка

МАТЕМАТИКА

- **В.А. ПАНЧИЩИНА**

- Рабочая программа
- Учебное пособие (5-6 кл.)

Т.Г. ХОДОТ



- Рабочие программы
- Учебное пособие
- Книга для учителя

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Математика. Наглядная геометрия.

§ 6 Ломаная

6.1. Что такое ломаная? Мы уже встречались с ломаными, когда рассматривали разнообразные линии. Сейчас погово
робнее.

Ломаная — это линия, которая составляется из отр
один из концов первого отрезка служит концом вто
другой конец второго отрезка служит концом третьего
(рис. 93); при этом соседние отрезки, из которых сос
не должны составлять нового отрезка.

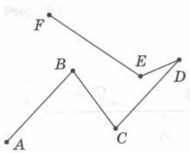


Рис. 93

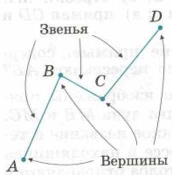


Рис. 94

Отрезки, из которых соста
называются её *звеньями*, а ко
ков — *вершинами ломаной* (р
маной составляется из имён
тых в последовательности, с
их расположению. Например,
изображена ломаная *ABCDEF*

6.1. Нарисуй какую-нибудь ло
фигуру, составленную из отре
щуюся ломаной.

6.2. Назови лишнюю фигуру

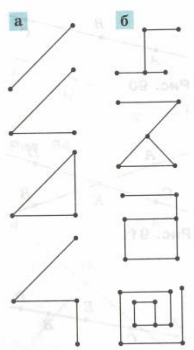
6.3. Построй трёхзвенную,
и шестизвенную ломаные. С
у каждой из них? Назови их
ши названия ломаных.

6.4. Нарисуй какие-нибудь ло
тую и незамкнутую): а) трёх
тырёхзвенные; в) шестизвенн
ли при этом знакомые фигур

6.5. а) Какое наименьшее чи
жет иметь ломаная? б) Мож
быть стовзенной? в) Может ли
вершин больше, чем звеньев
ко же)?

6.6. Какое наименьшее число
быть у замкнутой ломаной?
такая ломаная?

6.7. На рисунке 96 выделен
надлежащие каркасам мног
кие из них плоские, какие пр
Какие ломаные замкнутые,
тые?



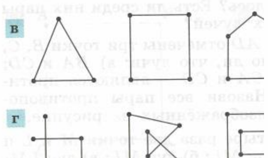


Рис. 95

Рис. 277

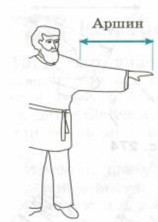


Рис. 278

На основе каждой сажени были определены другие меры длины: полусажень, локоть $\left(\frac{1}{4}\text{ сажени}\right)$, пядь $\left(\frac{1}{8}\text{ сажени}\right)$.

Верста — это старинная русская мера пути, равная 500 саженям. Сейчас на дорогах для измерения пути ставят километровые столбы, а раньше ставили верстовые. До сих пор на Московском проспекте в Петербурге сохранились верстовые столбы, отмечавшие путь из Петербурга в Москву (рис. 277).

В XVI в. в России появилась новая единица измерения длины — аршин. *Аршин* — расстояние от плеча до конца вытянутой руки взрослого человека (рис. 278). В XVIII в. Россия стала больше торговать с Западной Европой. Нужны были меры, которые было бы легче сравнивать с западными мерами длины. Поэтому решили сохранить названия старых мер, но заново определить их длину. Для определения длин новых русских мер Пётр I предложил воспользоваться английскими мерами, так как они не менялись уже несколько столетий и ими часто пользовались в торговле.

Основные английские меры длины — это *ярд, фут* и *дюйм*. Эти единицы длины тоже определены частями тела взрослого человека. *Фут* по-английски означает «ступня»; *дюйм* — голландское слово и означает «большой палец», а также первую фалангу большого пальца руки. Поначалу 1 дюйм определяли как длину трёх ячменных зёрен. Но затем договорились считать 1 дюйм равным одной двенадцатой части фута. (Есть и более мелкие единицы длины, имеющие геометрические названия: линия и точка. Один дюйм состоит из 10 линий, одна линия — из 10 точек.)

Именно дюйм, фут и ярд были положены в основу новых русских мер. По указу Петра I сажень, аршин, пядь и вершок определялись так, чтобы выполнялись равенства:

1 сажень = 3 аршинам, 1 аршин = 4 пядям, 1 пядь = 4 вершкам,
1 сажень = 7 футам, 1 фут = 12 дюймам.

15.3. Метрические меры длины. С развитием торговых связей у каждого народа возникала необходимость переводить свои национальные меры длины в меры длины других стран. А это очень сложная задача. Поэтому появилась потребность в единых международных единицах длины, определяемых через что-то более постоянное, чем длина ступни или макового зерна. Так появился *метр*. Он был определён как одна сорокамиллионная часть парижского меридиана. Был изготовлен эталон метра — металлический брус из сплава платины и иридия, и на него нанесены два штриха, расстояние между которыми было принято за единицу длины и названо метром. Вместе с метром родилась метрическая система мер. Она включает сам метр и другие единицы длины, которые получаются из метра умножением или делением на 10, 100 и т. д. Некоторые из этих единиц ты знаешь. Это миллиметр, сантиметр, дециметр и километр.

Все эти слова сложные. Один из корней у них общий — *метр*. Корни *милли-, санти-, деци-* имеют латинское происхождение и обозначают соответствующую часть метра:

милли (*milli*) — тысячный, значит, один миллиметр — это $\frac{1}{1000}$ метра;

санти (*centum*) — сотая, значит, один сантиметр — это $\frac{1}{100}$ метра;

деци (*decima*) — десятая, таким образом, один дециметр — это $\frac{1}{10}$ метра.

С корнем *санти* (*centum*) мы встречаемся также в словах *процент* $\left(\frac{1}{100}\text{ числа}\right)$, *центнер* — 100 кг. Вспомни ещё какие-нибудь слова, имеющие тот же корень. Греческий корень *кило* (*chilio*) переводится как *тысяча*, поэтому 1 км — это 1000 м (так же как 1 кг — это 1000 г).

Итак, между различными единицами длины метрической системы существуют следующие соотношения:

1 км = 1000 м	1 м = 1000 мм	1 м = 100 см
1 м = 10 дм	1 дм = 10 см	1 см = 10 мм

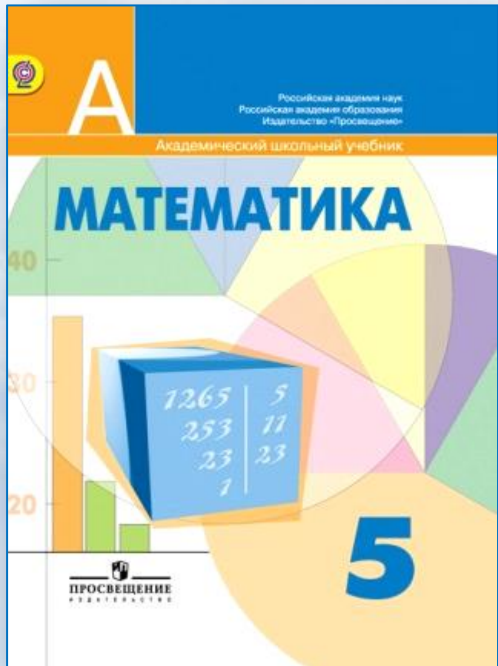
После введения метра одни страны сразу приняли его, другие же, например Англия, до сих пор измеряют длины в дюймах, футах, ярдах и милях. Но всем пришлось пересчитать свои меры в международные и, наоборот, измерить один метр в национальных единицах. Так, английский фут оказался равен приблизительно 30 см. Примерная связь между старинными русскими мерами длины и метрической системой приведена в следующей таблице.

Метрические меры	Старые русские меры
1 км	$\frac{94}{100}$ версты = 470 саженей
1 м	$22\frac{1}{2}$ вершка = 40 дюймов
1 дм	4 дюйма

Старые русские меры	Метрические меры
1 верста	$1\frac{7}{100}$ км
1 аршин	71 см
1 фут	30 см
1 вершок	$4\frac{1}{2}$ см
1 дюйм	$2\frac{1}{2}$ см

МАТЕМАТИКА

- Г.В. ДОРОФЕЕВ, И.Ф. ШАРЫГИН И ДР.



- Рабочая программа
- Учебник (5-6 кл.)
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Контрольные работы
- Тематические тесты
- Устные упражнения
- Методические рекомендации

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Линия УМК под редакцией Дорофеева Г. В

1.2.3.1.5.1-2

А

Работаем с символами (252—254)

252 Запишите короче произведение и сумму:
а) 2 · 2 · 2 · 2 и 2 + 2 + 2 + 2; б) 8 + 8 + 8 и 8 · 8 · 8.

253 Запишите в виде степени произведение чисел:
а) 3 · 3; д) 10 · 10 · 10 · 10 · 10;
б) 10 · 10 · 10; е) 1 · 1 · 1 · 1 · 1 · 1 · 1 · 1;
в) 2 · 2 · 2
г) 4 · 4 · 4

254 Запишите
а) $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots}_{\text{20 множ}}$
б) $\underbrace{10 + 10}_{\text{10 слага}}$
в) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots}_{\text{100 множ}}$

ГЛАВА 1

Линии

Всякий раз, когда мы прикасаемся к поверхности бумаги кончиком карандаша, мы отмечаем точку, а если ведём карандашом по бумаге, то рисуем линию. И в жизни нас окружают линии — береговая линия, линия горизонта. С рассмотрения линий и их свойств мы начнём изучение самой древней науки — геометрии. Наиболее раннее дошедшее до нас геометрическое сочинение было написано ещё в Древнем Египте — 37 веков тому назад! Геометрия не только строга и логична, как и положено науке, но и очень красива. Многое роднит её с искусством, поэтому мы не раз при изучении геометрии вспомним и архитектурные образы, и народные промыслы.

1.1 Разнообразный мир линий

Линия — это не только след карандаша на листе бумаги. Это и след мела на асфальте, и конька на льду, и падающей звезды на ночном небе. Можно сказать, что линия — это след движущейся точки. В наших примерах такой точкой является остриё карандаша, край куска мела, зубец конька, раскалённый метеор, летящий к Земле. Но слово «линия» происходит от латинского слова *linea*, означающего «лён, льняная нить, шнур, верёвка». Верёвка сплетается из множества нитей; след самолёта, оставляемый им в небе, состоит из множества мельчайших облачков; струя воды образуется из множества капель. Можно сказать, что линия — это множество точек.

Все точки одинаковы, и одна точка от другой ничем не отличается. А мир линий разнообразен. Посмотрите на рисунок 1.1.

- Название каких линий на рисунке 1.1 вы знаете?
- Как бы вы назвали линию ④? линию ⑤?
- Убедитесь, что узор под номером ⑥ образован одной линией.

Рис. 1.1

Б

Работаем с символами (237—239)

237 Переставьте всеми возможными способами знаки действий в выражении 25 + 7 · 3 − 2 и найдите значение каждого выражения.

238 Расставьте в выражении 2 · 2 − 2 : 2 скобки всеми возможными способами и найдите значение каждого выражения.

239 В выражении 3 · 3 + 3 : 3 − 3 расставьте скобки так, чтобы в результате получилось число:
а) 3; б) 9; в) 1.

240 Выполните действия:
662 : 27 + 36 944 − 43 · 809;
1530 : (12 · 6 − 38) · 15;
· (352 719 − 57 837) : 98 + 307 · 107;
07 · 54 − 793) − 270 000 : 18;
368 − 274) + 68 · (127 + 128);
− 4781) : 37 − (1519 − 637) : 42.
значение выражения:
96) · (1010 − 31 248 : 62) − 170 · 1500;
08 − 208 · (563 + 44)) : 333 + 2079 : 77;
31 − (46 348 + 67 892) : 21) : 14 + 143 · 26;
400 100 − 397 964) + 5280) : 24 − 8154.
оволоки длиной 110 см надо разрезать на куски длиной 15 см так, чтобы не осталось обрезков. Как вы считаете, можно ли ь поставленную задачу, если будет отрезано 6 кусков длиной усков длиной 15 см? Каким может быть число 15-сантиметровых айдите все решения задачи и запишите их в виде числовых вы-

адачу (243—245).
а должна была выпустить 2400 станков за 30 дней. Но она из-ла на 20 станков в день больше, чем планировала. На сколько ьше был выполнен этот заказ?
автомобиль должен был проехать 240 км. Но он увеличил ско-20 км/ч. На сколько меньше времени он потратил на дорогу?
трудницы редакции, рабое, набрали на компьютере ницы рукописи книги за а из них набирала 12 стра-. Сколько страниц в час наругая сотрудница?
сын, работая вместе, покрар длиной 168 м за 12 ч. Если расил забор один, он выпол-у работу за 21 ч. За сколько расил бы этот забор сын?

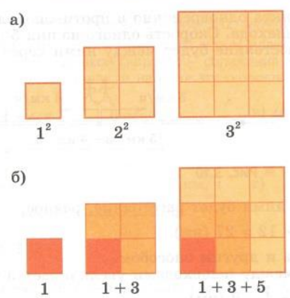


Рис. 3.8

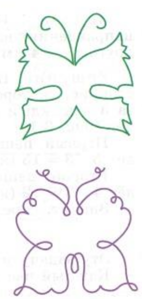


Рис. 3.9

П

282 Найдите значение выражения:
а) 510 : 17 + 14 · (48 − 80 : 4); б) 20 · 15 + 35 · 15 − 31 110 : 51.

283 а) Запишите все чётные трёхзначные числа, которые можно составить, используя только цифры 1, 2, 3, 4, причём цифры в числе должны быть различны. Сколько всего таких чисел имеется?
б) Сколько существует нечётных трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, причём так, чтобы цифры в числе были различны? Выпишите эти числа.

284 **Ищем сходство и различие** Чем схожи и чем различаются две линии, изображённые на рисунке 3.9? Перерисуйте этих «бабочек» на нелинованный лист бумаги.

Особенности линии:

4.4 Задачи на уравнивание

Задача. В двух пачках всего 70 тетрадей, причём в первой на 10 тетрадей больше, чем во второй (рис. 4.12). Сколько тетрадей в каждой пачке?

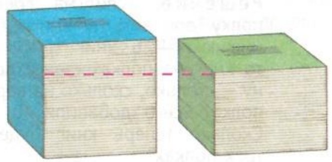


Рис. 4.12

Решение. Уравняем мысленно каким-либо способом число тетрадей в пачках; например, «уберём» из первой пачки 10 тетрадей. Тогда в двух пачках окажется

$$70 - 10 = 60 \text{ (тетрадей).}$$

Так как теперь пачки одинаковы, то в каждой из них $60 : 2 = 30$ тетрадей. Иными словами, мы выяснили, что во второй (меньшей) пачке 30 тетрадей. Чтобы узнать, сколько тетрадей было в первой пачке, «вернём» обратно 10 тетрадей. Получим

$$30 + 10 = 40 \text{ (тетрадей).}$$

Ответ. 40 и 30 тетрадей.
(Проверьте: $40 + 30 = 70$ тетрадей и $40 - 30 = 10$ тетрадей.)

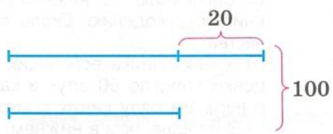


Рис. 4.13

- Как иначе можно уравнять число тетрадей в пачках?
- Придумайте по рисунку 4.13 задачу на уравнивание и решите её.

П

356 Представьте данное число в виде суммы разрядных слагаемых:
а) 52 170;
б) 3201;
в) 702 044.

357 Найдите значение выражения, используя таблицу квадратов:
а) $3 \cdot (14^2 + 44)$;
б) $5 \cdot 18^2 - 105$;
в) $(300 - 276)^2 \cdot 3$;
г) $2000 - 2 \cdot 27^2$.

358 Скопируйте рисунок 4.11. Чему равны радиусы дуг окружностей?

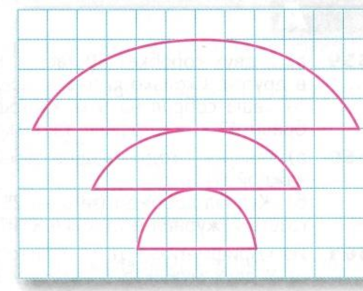


Рис. 4.11

- целенаправленное развитие познавательной сферы учащихся, активное формирование универсальных учебных действий

Особенности линии:

4 Предисловие

Упражнения в пунктах разделены на две группы — **А** и **Б**.

Задания группы **А** попроще, группы **Б** — посложнее. А в конце каждого пункта под буквой **П** помещены специальные задания для повторения пройденного.

Чтобы чувствовать себя уверенно в мире математики, нужно научиться наблюдать, видеть закономерности, анализировать, рассуждать, делать выводы. Вот почему в каждом пункте некоторые упражнения обозначены именно такими заголовками: **Рассуждаем**, **Исследуем**.

Облегчить выполнение заданий вам помогут *Советы* и *Подсказки*. Кроме того, в конце учебника есть раздел, который называется **Ответы**. Он предназначен для того, чтобы вы могли проверять себя при работе с упражнениями.

Каждая глава заканчивается разделом под названием **Чему вы научились**. Там описаны основные знания и умения, которыми вы должны овладеть при изучении этой главы, и приведены задания, позволяющие это проверить. Обратите внимание: это задания *обязательного уровня*. Их необходимо уметь выполнять, чтобы обеспечивать себе возможность двигаться дальше. А те, кому интересно, конечно же, будут знать и уметь больше.

У вас в руках яркая, красочная книга. Над её созданием трудился большой коллектив людей, которые старались сделать для вас дорогу в мир Математики привлекательной и интересной. На страницах учебника вы увидите много фотографий, рисунков. Они помещены для того, чтобы вы поняли: мир Математики — это целый мир вокруг, с которым вы встречаетесь каждый день!

Успехов вам и удачи на вашем пути!

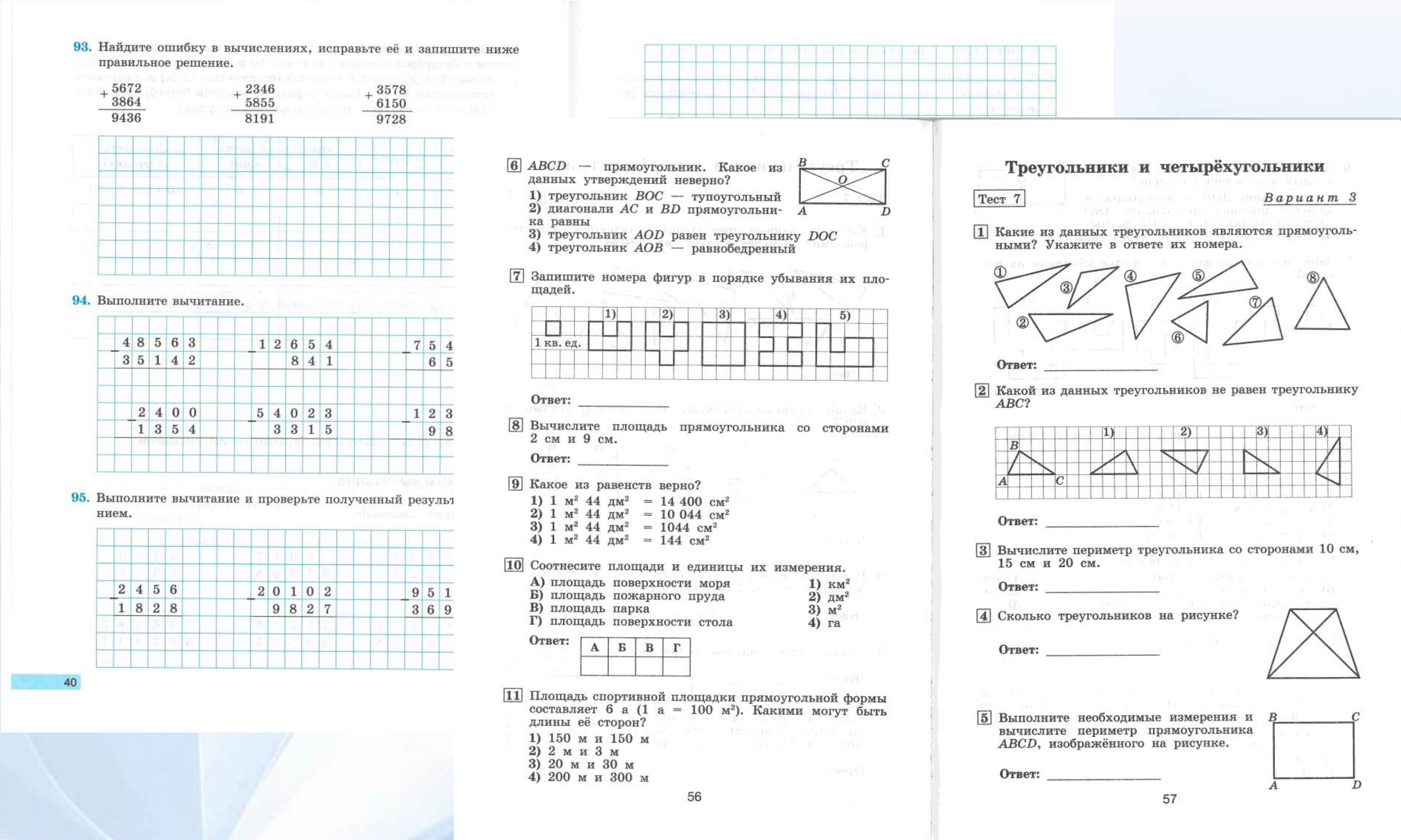
Авторы

284

Предметный указатель

-создание условий для понимания и осознанного овладения содержанием курса

Особенности линии:


93. Найдите ошибку в вычислениях, исправьте её и запишите ниже правильное решение.

$5672 + 3864 = 9436$ $2346 + 5855 = 8191$ $3578 + 6150 = 9728$

94. Выполните вычитание.

$48563 - 35142$ $12654 - 841$ $754 - 65$

$2400 - 1354$ $54023 - 3315$ $123 - 98$

95. Выполните вычитание и проверьте полученный результ... нием.

$2456 - 1828$ $20102 - 9827$ $951 - 369$

40

6 $ABCD$ — прямоугольник. Какое из данных утверждений неверно?
1) треугольник BOC — тупоугольный
2) диагонали AC и BD прямоугольника равны
3) треугольник AOD равен треугольнику DOC
4) треугольник AOB — равнобедренный

7 Запишите номера фигур в порядке убывания их площадей.

1 кв. ед. 1) 2) 3) 4) 5)

Ответ: ____________

8 Вычислите площадь прямоугольника со сторонами 2 см и 9 см.

Ответ: ____________

9 Какое из равенств верно?
1) 1 м² 44 дм² = 14 400 см²
2) 1 м² 44 дм² = 10 044 см²
3) 1 м² 44 дм² = 1044 см²
4) 1 м² 44 дм² = 144 см²

10 Соотнесите площади и единицы их измерения.
А) площадь поверхности моря 1) км²
Б) площадь пожарного пруда 2) дм²
В) площадь парка 3) м²
Г) площадь поверхности стола 4) га

Ответ:

А	Б	В	Г

11 Площадь спортивной площадки прямоугольной формы составляет 6 а (1 а = 100 м²). Какими могут быть длины её сторон?
1) 150 м и 150 м
2) 2 м и 3 м
3) 20 м и 30 м
4) 200 м и 300 м

56

Треугольники и четырёхугольники

Тест 7 *Вариант 3*

1 Какие из данных треугольников являются прямоугольными? Укажите в ответе их номера.

Ответ: ____________

2 Какой из данных треугольников не равен треугольнику ABC?

Ответ: ____________

3 Вычислите периметр треугольника со сторонами 10 см, 15 см и 20 см.

Ответ: ____________

4 Сколько треугольников на рисунке?

Ответ: ____________

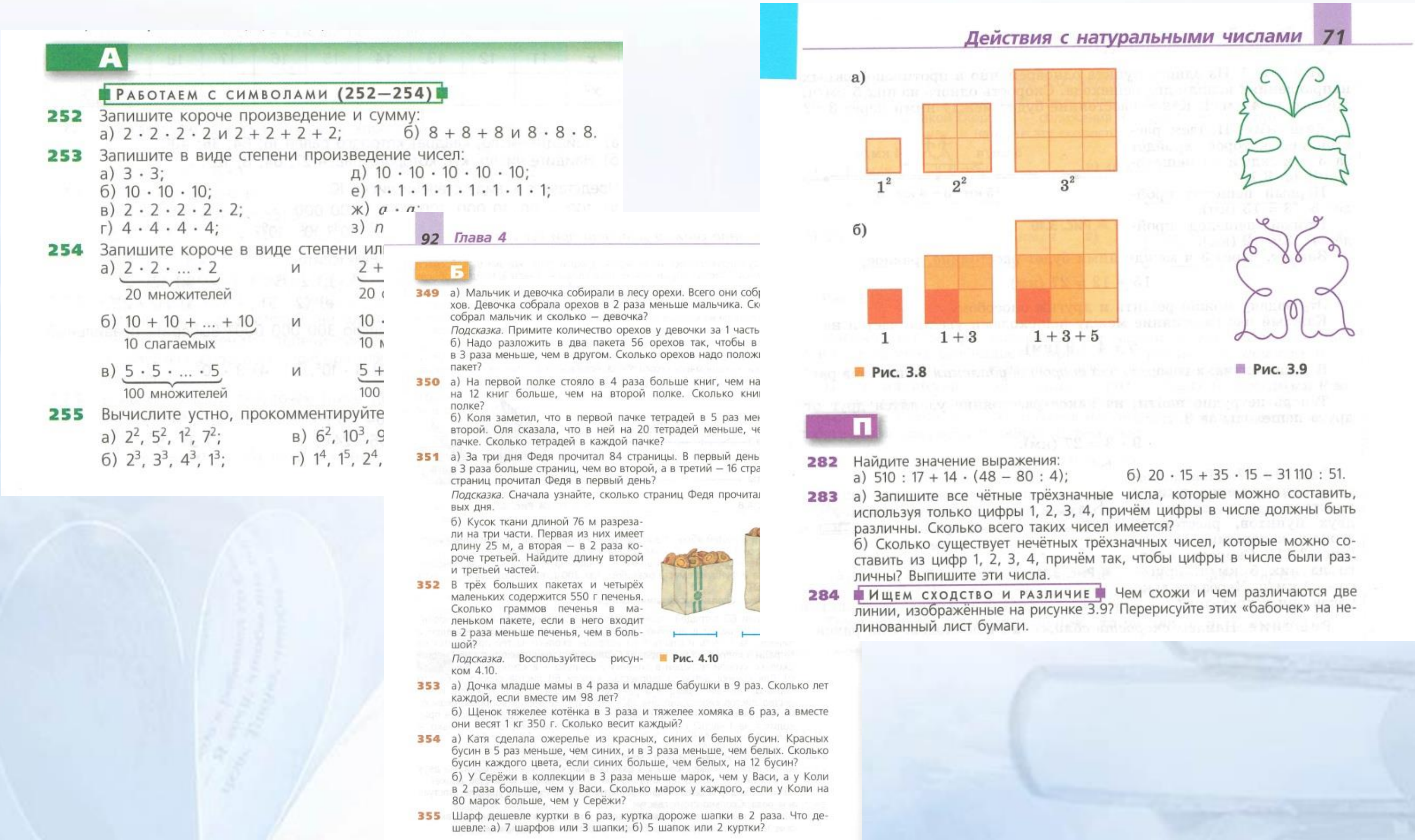
5 Выполните необходимые измерения и вычислите периметр прямоугольника $ABCD$, изображённого на рисунке.

Ответ: ____________

57

эффективное обучение математическому языку и знаково-символическим действиям;

Особенности линии:



А

Работаем с символами (252—254)

252 Запишите короче произведение и сумму:
а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $2 + 2 + 2 + 2$; б) $8 + 8 + 8$ и $8 \cdot 8 \cdot 8$.

253 Запишите в виде степени произведение чисел:
а) $3 \cdot 3$; д) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$;
б) $10 \cdot 10 \cdot 10$; е) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$;
в) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; ж) $a \cdot a$
г) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; з) n

254 Запишите короче в виде степени ил
а) $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{20 \text{ множителей}}$ и $2 +$
б) $\underbrace{10 + 10 + \ldots + 10}_{10 \text{ слагаемых}}$ и $10 \cdot$
в) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{100 \text{ множителей}}$ и $5 +$

255 Вычислите устно, прокомментируйте
а) $2^2, 5^2, 1^2, 7^2$; в) $6^2, 10^3, 9$
б) $2^3, 3^3, 4^3, 1^3$; г) $1^4, 1^5, 2^4,$

92 Глава 4

Б

349 а) Мальчик и девочка собирали в лесу орехи. Всего они соб хов. Девочка собрала орехов в 2 раза меньше мальчика. Ск собрал мальчик и сколько — девочка?
Подсказка. Примите количество орехов у девочки за 1 часть
б) Надо разложить в два пакета 56 орехов так, чтобы в в 3 раза меньше, чем в другом. Сколько орехов надо полож пакет?

350 а) На первой полке стояло в 4 раза больше книг, чем на на 12 книг больше, чем на второй полке. Сколько кни полке?
б) Коля заметил, что в первой пачке тетрадей в 5 раз ме второй. Оля сказала, что в ней на 20 тетрадей меньше, че пачке. Сколько тетрадей в каждой пачке?

351 а) За три дня Федя прочитал 84 страницы. В первый день в 3 раза больше страниц, чем во второй, а в третий — 16 стра страниц прочитал Федя в первый день?
Подсказка. Сначала узнайте, сколько страниц Федя прочита вых дня.
б) Кусок ткани длиной 76 м разрезали на три части. Первая из них имеет длину 25 м, а вторая — в 2 раза короче третьей. Найдите длину второй и третьей частей.

352 В трёх больших пакетах и четырёх маленьких содержится 550 г печенья. Сколько граммов печенья в маленьком пакете, если в него входит в 2 раза меньше печенья, чем в большой?
Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 4.10.

Рис. 4.10

353 а) Дочка младше мамы в 4 раза и младше бабушки в 9 раз. Сколько лет каждой, если вместе им 98 лет?
б) Щенок тяжелее котёнка в 3 раза и тяжелее хомяка в 6 раз, а вместе они весят 1 кг 350 г. Сколько весит каждый?

354 а) Катя сделала ожерелье из красных, синих и белых бусин. Красных бусин в 5 раз меньше, чем синих, и в 3 раза меньше, чем белых. Сколько бусин каждого цвета, если синих больше, чем белых, на 12 бусин?
б) У Серёжи в коллекции в 3 раза меньше марок, чем у Васи, а у Коли в 2 раза больше, чем у Васи. Сколько марок у каждого, если у Коли на 80 марок больше, чем у Серёжи?

355 Шарф дешевле куртки в 6 раз, куртка дороже шапки в 2 раза. Что дешевле: а) 7 шарфов или 3 шапки; б) 5 шапок или 2 куртки?

Действия с натуральными числами 71

а) 1^2 2^2 3^2

б) 1 1 + 3 1 + 3 + 5

Рис. 3.8 Рис. 3.9

П

282 Найдите значение выражения:
а) $510 : 17 + 14 \cdot (48 - 80 : 4)$; б) $20 \cdot 15 + 35 \cdot 15 - 31\,110 : 51$.

283 а) Запишите все чётные трёхзначные числа, которые можно составить, используя только цифры 1, 2, 3, 4, причём цифры в числе должны быть различны. Сколько всего таких чисел имеется?
б) Сколько существует нечётных трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, причём так, чтобы цифры в числе были различны? Выпишите эти числа.

284 **Ищем сходство и различие** Чем схожи и чем различаются две линии, изображённые на рисунке 3.9? Перерисуйте этих «бабочек» на нелинованный лист бумаги.

-использование технологии уровневой дифференциации, которая позволяет работать в классах разного уровня, индивидуализировать учебный процесс в рамках одного коллектива.

УМК «Математика 5-6» под ред. Г.В. Дорофеева

Чему вы научились

Обязательные умения

Умею проводить и обозначать прямые, лучи, строить и измерять отрезки.

1. Отметьте точки *A* и *B*. Проведите прямую *AB*. Отложите на этой прямой отрезок *NM*, равный отрезку *AB*. Найдите длину отрезка *AN*. Выпишите лучи с началом в точке *M*.

Умею находить длину ломаной.

2. Найдите длины ломаных, изображённых на рисунке.

Умею строить окружность заданного радиуса, окружность с центром, проходящую через заданную точку. Знаю, как связаны радиус и диаметр окружности.

3. Отметьте точку *O*. Проведите окружность с центром в точке *O* и радиусом 4 см. Чему равен диаметр этой окружности?
4. Отметьте точки *A* и *B*. Проведите окружность с центром в точке *A*, проходящую через точку *B*. Проведите радиус окружности и найдите его длину.

Знаю единицы длины метрической системы мер; умею выражать одни единицы измерения длины через другие.

5. Назовите предмет:
   а) размеры которого меньше 1 см;
   б) длина которого больше 1 м.
6. Заполните пропуски:
   3 см 2 мм = ... мм; 325 см = ... м ... см;
   5 м 20 см = ... см; 672 мм = ... см ... мм.

Могу выполнить ещё и другие задания (укажите несколько номеров).

Чему вы научились

Обязательные умения

Умею изображать прямоугольный треугольник с заданными сторонами, образующими прямой угол, равнобедренный треугольник с заданными боковыми сторонами и углом между ними.

1. Начертите прямоугольный треугольник, у которого стороны, образующие прямой угол, равны 3 см и 5 см.
2. Начертите равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 4 см и образуют угол 50°.

Умею находить периметр треугольника, прямоугольника.

3. Вычислите периметр треугольника:
   а) равностороннего со стороной 5 см;
   б) равнобедренного с боковой стороной 17 см и основанием 10 см.
4. Чему равен периметр:
   а) прямоугольника со сторонами 15 см и 20 см;
   б) квадрата со стороной 45 см?

Умею строить прямоугольник с заданными сторонами.

5. Постройте на нелинованной бумаге:
   а) прямоугольник со сторонами 3 см и 3 см 5 мм;
   б) квадрат со стороной 4 см.

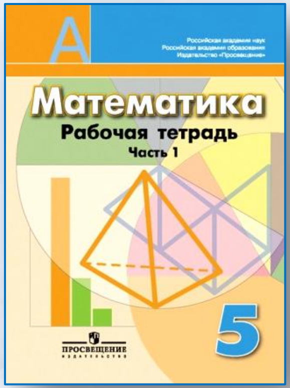
Умею находить площадь прямоугольника.

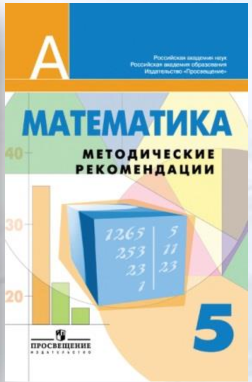
6. Вычислите площадь:
   а) прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см;
   б) квадрата со стороной 13 см.

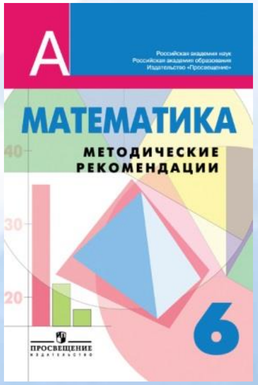
Знаю свойства прямоугольника и свойства квадрата.

7. Какие свойства есть у квадрата, но нет у других прямоугольников?
   1) Диагонали пересекаются под прямым углом.
   2) Диагонали равны.
   3) Диагонали в точке пересечения делятся пополам.
   4) Все стороны равны.
   5) Все углы прямые.

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Математика»



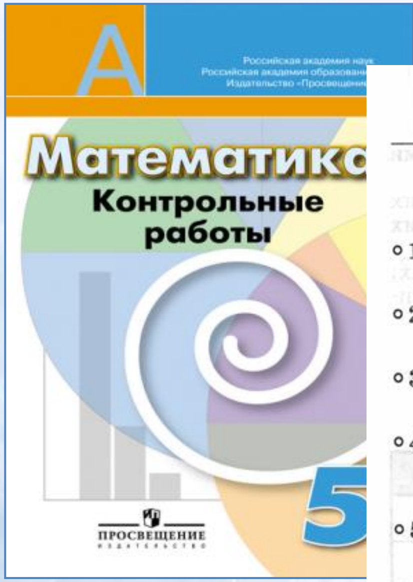




ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Математика»



Контрольная работа № 3

Действия с десятичными дробями

Вариант 4

∘ 1 Выполните действия:
а) $30{,}5 \cdot 5{,}6$; б) $1{,}26 : 2{,}8$.

∘ 2 Вычислите:
а) $28{,}5 - (2{,}8 + 3{,}65)$; б) $7{,}8 : (5 - 4{,}4) \cdot 3$.

∘ 3 Выразите:
а) 1,45 м в сантиметрах; б) 740 г в килограммах.

∘ 4 Скорость автомобиля 75 км/ч.
а) За какое время он пройдёт 30 км?
б) Какой путь он пройдёт за 0,2 ч?

∘ 5 Пешеход прошёл 60 м, сделав 90 шагов. Найдите примерную длину его шага (в метрах), округлив результат до десятых.

• 6 Вычислите:

$$(6{,}5 - 1{,}26) : 0{,}4 + 3{,}6 \cdot 1{,}5.$$

• 7 Расстояние между двумя городами равно 375 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно выехали автомобиль и автобус. Они встретились через 2,5 ч. Определите скорость автомобиля, если известно, что она больше скорости автобуса на 20 км/ч.

• 8 Вычислите значение числового выражения рациональным способом и запишите цепочку преобразований:

$$2{,}36 \cdot 25 + 1{,}04 \cdot 17 + 1{,}04 \cdot 8.$$

Дополнительное задание

* 9 Частное чисел 0,0689 и 0,26 равно 0,265. Перенесите в делимом и делителе запятую так, чтобы частное было равно 26,5. Придумайте два примера.

Какие умения проверяются

✓ Выполнять арифметические действия с десятичными дробями;
✓ вычислять значения числовых выражений, содержащих дробные числа, и применять свойства арифметических действий для вычисления рациональным способом;
✓ выражать одни единицы измерения в других единицах;
✓ решать текстовые задачи, используя различные зависимости между величинами;
✓ округлять десятичные дроби.

Сколько заданий необходимо выполнить на отметки «3», «4» и «5»

	Отметка «3»		Отметка «4»		Отметка «5»	
Задание	∘	•	∘	•	∘	•
Выполнено верно	7	—	8	1	9	2

Если задание содержит пункты а), б) и т. д., то каждый пункт считается как отдельное задание.

Дополнительное задание (*) выполняется по желанию на отдельную отметку и при выставлении отметки за контрольную работу не учитывается.

Результаты выполнения заданий

Поставьте в таблицу:
«+», если задание выполнено верно;
«−», если задание не выполнено.

∘									•			*
1а	1б	2а	2б	3а	3б	4а	4б	5	6	7	8	9

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Математика»

Десятичные дроби

Тест 4 — *Вариант 1*

1 Дана десятичная дробь 128,70456. Соотнесите цифры (левый столбец) и разряды, в которых эти цифры записаны (правый столбец).

А) 7 — 1) разряд десятых
Б) 5 — 2) разряд десятков
В) 2 — 3) разряд сотых
Г) 0 — 4) разряд десятитысячных

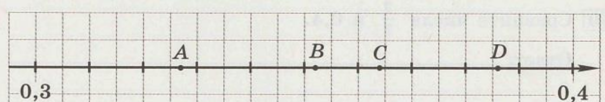
Ответ:

А	Б	В	Г

2 Запишите число $\frac{7031}{1000}$ в виде десятичной дроби.

1) 703,1 2) 70,31 3) 0,7031 4) 7,031

3 Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу 0,327. Какая это точка?



1) *A* 2) *B* 3) *C* 4) *D*

4 Какое из равенств неверно?

1) 1 м 20 см = 1,2 м
2) 9 км 250 м = 9,25 км
3) 6 м 5 дм = 6,5 м
4) 7 км 30 м = 7,3 км

5 Какую из перечисленных обыкновенных дробей нельзя представить в виде десятичной дроби?

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{15}$ 3) $\frac{1}{20}$ 4) $\frac{1}{25}$

29

Сложение и вычитание десятичных дробей

Тест 5 — *Вариант 1*

1 Какие суммы найдены неверно?

А) $3,27 + 5,2 = 3,79$
Б) $1,83 + 3,2 = 5,03$
В) $4,83 + 3,2 = 7,03$
Г) $6,25 + 2,35 = 8,6$

1) только А 2) А и Б 3) А и В 4) А, В и Г

2 Выполните действия.

$6,3 + 12,84$ $7,5 - 0,48$

3 Каждой сумме из левого столбца поставьте в соответствие равную ей десятичную дробь из правого столбца.

А) 1 + 0,003 + 0,0002 — 1) 1,302
Б) 1 + 0,3 + 0,002 — 2) 1,032
В) 1 + 0,03 + 0,002 — 3) 1,0032

Ответ:

А	Б	В

4 Для овощного салата купили огурцы и помидоры. Огурцы весят 1,8 кг, а помидоры — на 0,3 кг больше. Сколько весят эти овощи вместе?

Ответ: ______________

37

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Математика»

П-23 **Деление в данном отношении**

Вариант 1

1. Разделите 30 р. в отношении 2 : 3.
2. У продавца в связке синие и красные шары. Число синих шаров относится к числу красных как 5 к 4. Сколько всего в связке шаров, если красных в ней 20 штук?

Вариант 2

1. Разделите 60 р. в отношении 3 : 2.
2. У продавца в связке желтые и синие шары, причем желтых 12 штук. Сколько всего в связке шаров, если отношение числа желтых к числу синих равно 4 : 3?

чем с другого. Какую часть всего урожая собрали с каждого участка?

б) Для составления смеси трав из ромашки и зверобоя ромашки надо взять в 4 раза меньше, чем зверобоя. Какую часть смеси составляет каждая из этих трав?

Проверь себя сам!

1. Какое из действий следует выполнить, чтобы решить задачу: «В школе 1600 учащихся, $\frac{3}{10}$ всех учеников учится в начальных классах. Сколько учащихся в начальных классах?»

   А. $1600 - \frac{3}{10}$.   Б. $1600 \cdot \frac{3}{10}$.   В. $1600 : \frac{3}{10}$.

2. Какое из действий надо выполнить, чтобы решить задачу: «От поселка до почты 2 км, что составляет $\frac{4}{5}$ расстояния от поселка до станции. Чему равно расстояние от поселка до станции?»

   А. $2 : \frac{4}{5}$.   Б. $2 \cdot \frac{4}{5}$.   В. $2 - \frac{4}{5}$.

3. Какое из действий надо выполнить, чтобы решить задачу: «Для школьного завтрака привезли 150 л сока, причем 75 л — это томатный сок. Какую часть привезенного сока составляет томатный?»

   А. $75 \cdot 150$.   Б. $\frac{150}{75}$.   В. $\frac{75}{150}$.

4. В банку помещается 600 г черники. Наташа набрала $\frac{3}{4}$ банки. Сколько граммов ягод набрала Наташа?

   А. 450 г.   Б. 800 г.   В. 150 г.

5. В кувшин помещается 750 г воды. Его заполнили на $\frac{1}{3}$. Сколько воды можно еще добавить в кувшин?

   А. 250 г.   Б. 400 г.   В. 500 г.

6. За 6 ч поезд прошел $\frac{3}{5}$ всего расстояния. За какое время он пройдет все расстояние, если будет двигаться с той же скоростью?

   А. $3\frac{3}{5}$ ч.   Б. $6\frac{3}{5}$ ч.   В. 10 ч.

7. У пристани находится 10 двухместных лодок и 30 одноместных. Какую часть всех лодок составляют двухместные лодки?

   А. $\frac{1}{3}$.   Б. $\frac{1}{4}$.   В. $\frac{3}{4}$.

Б А В А В В Б

О-9 **Выражение процента дробью**

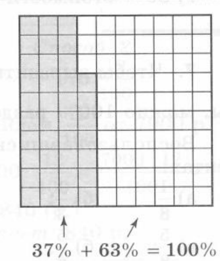
1% — это $\frac{1}{100}$ величины.

Закрашено 37 клеток из 100.

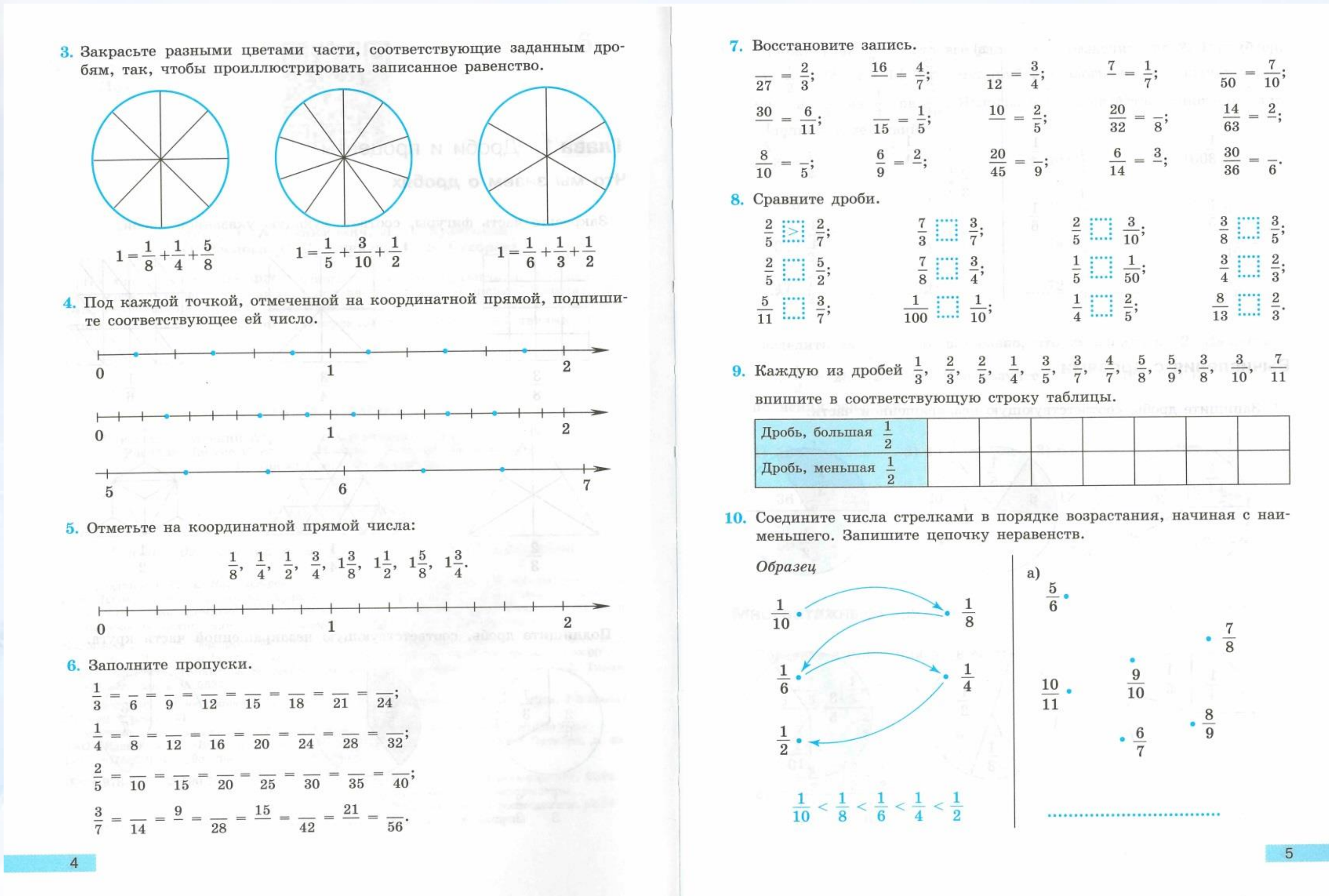
Закрашено $\frac{37}{100}$ квадрата, или 37% квадрата.

Не закрашено 63 клетки из 100.

Не закрашено $\frac{63}{100}$ квадрата, или 63% квадрата.



Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Математика»



3. Закрасьте разными цветами части, соответствующие заданным дробям, так, чтобы проиллюстрировать записанное равенство.

$1=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$ $\quad 1=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}$ $\quad 1=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

4. Под каждой точкой, отмеченной на координатной прямой, подпишите соответствующее ей число.

5. Отметьте на координатной прямой числа:

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{3}{8}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{8}, 1\frac{3}{4}.$

6. Заполните пропуски.

$\frac{1}{3}=\frac{}{6}=\frac{}{9}=\frac{}{12}=\frac{}{15}=\frac{}{18}=\frac{}{21}=\frac{}{24};$

$\frac{1}{4}=\frac{}{8}=\frac{}{12}=\frac{}{16}=\frac{}{20}=\frac{}{24}=\frac{}{28}=\frac{}{32};$

$\frac{2}{5}=\frac{}{10}=\frac{}{15}=\frac{}{20}=\frac{}{25}=\frac{}{30}=\frac{}{35}=\frac{}{40};$

$\frac{3}{7}=\frac{}{14}=\frac{9}{}=\frac{}{28}=\frac{15}{}=\frac{}{42}=\frac{21}{}=\frac{}{56}.$

4

7. Восстановите запись.

$\frac{}{27}=\frac{2}{3};\quad \frac{16}{}=\frac{4}{7};\quad \frac{}{12}=\frac{3}{4};\quad \frac{7}{}=\frac{1}{7};\quad \frac{}{50}=\frac{7}{10};$

$\frac{30}{}=\frac{6}{11};\quad \frac{}{15}=\frac{1}{5};\quad \frac{10}{}=\frac{2}{5};\quad \frac{20}{32}=\frac{}{8};\quad \frac{14}{63}=\frac{2}{};$

$\frac{8}{10}=\frac{}{5};\quad \frac{6}{9}=\frac{2}{};\quad \frac{20}{45}=\frac{}{9};\quad \frac{6}{14}=\frac{3}{};\quad \frac{30}{36}=\frac{}{6}.$

8. Сравните дроби.

$\frac{2}{5}\boxed{>}\frac{2}{7};\quad \frac{7}{3}\square\frac{3}{7};\quad \frac{2}{5}\square\frac{3}{10};\quad \frac{3}{8}\square\frac{3}{5};$

$\frac{2}{5}\square\frac{5}{2};\quad \frac{7}{8}\square\frac{3}{4};\quad \frac{1}{5}\square\frac{1}{50};\quad \frac{3}{4}\square\frac{2}{3};$

$\frac{5}{11}\square\frac{3}{7};\quad \frac{1}{100}\square\frac{1}{10};\quad \frac{1}{4}\square\frac{2}{5};\quad \frac{8}{13}\square\frac{2}{3}.$

9. Каждую из дробей $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{7}{11}$ впишите в соответствующую строку таблицы.

Дробь, большая $\frac{1}{2}$							
Дробь, меньшая $\frac{1}{2}$							

10. Соедините числа стрелками в порядке возрастания, начиная с наименьшего. Запишите цепочку неравенств.

Образец

$\frac{1}{10}<\frac{1}{8}<\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

а)

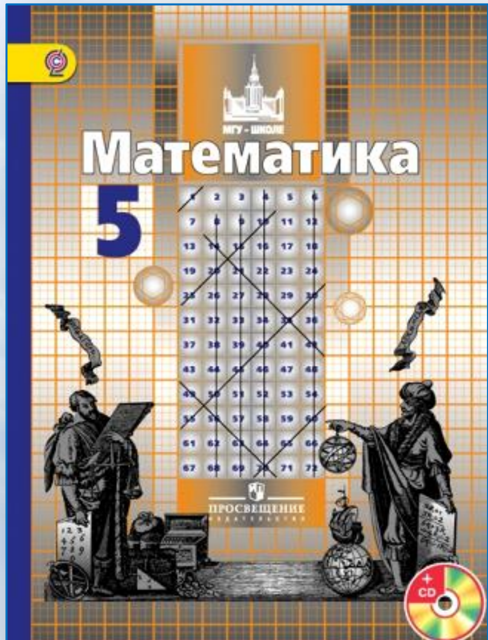
....

5

МГУ-школе

МАТЕМАТИКА

- **С.М. НИКОЛЬСКИЙ И ДР.**

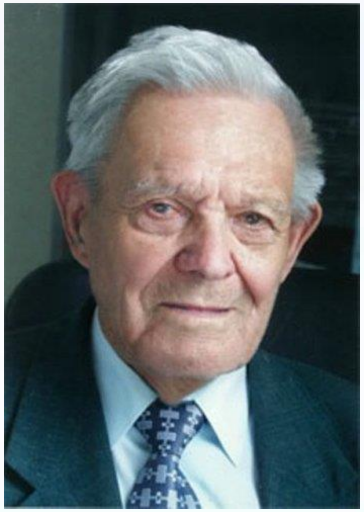


- Рабочая программа
- Учебник с электронным приложением (5-6 кл.)
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Сборник задач на смекалку
- Методические рекомендации

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Авторский коллектив



Сергей Михайлович Никольский

Михаил Константинович Потапов

Николай Николаевич Решетников

Александр Владимирович Шевкин

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

• Математика изложена в учебнике для работы по разным программам.

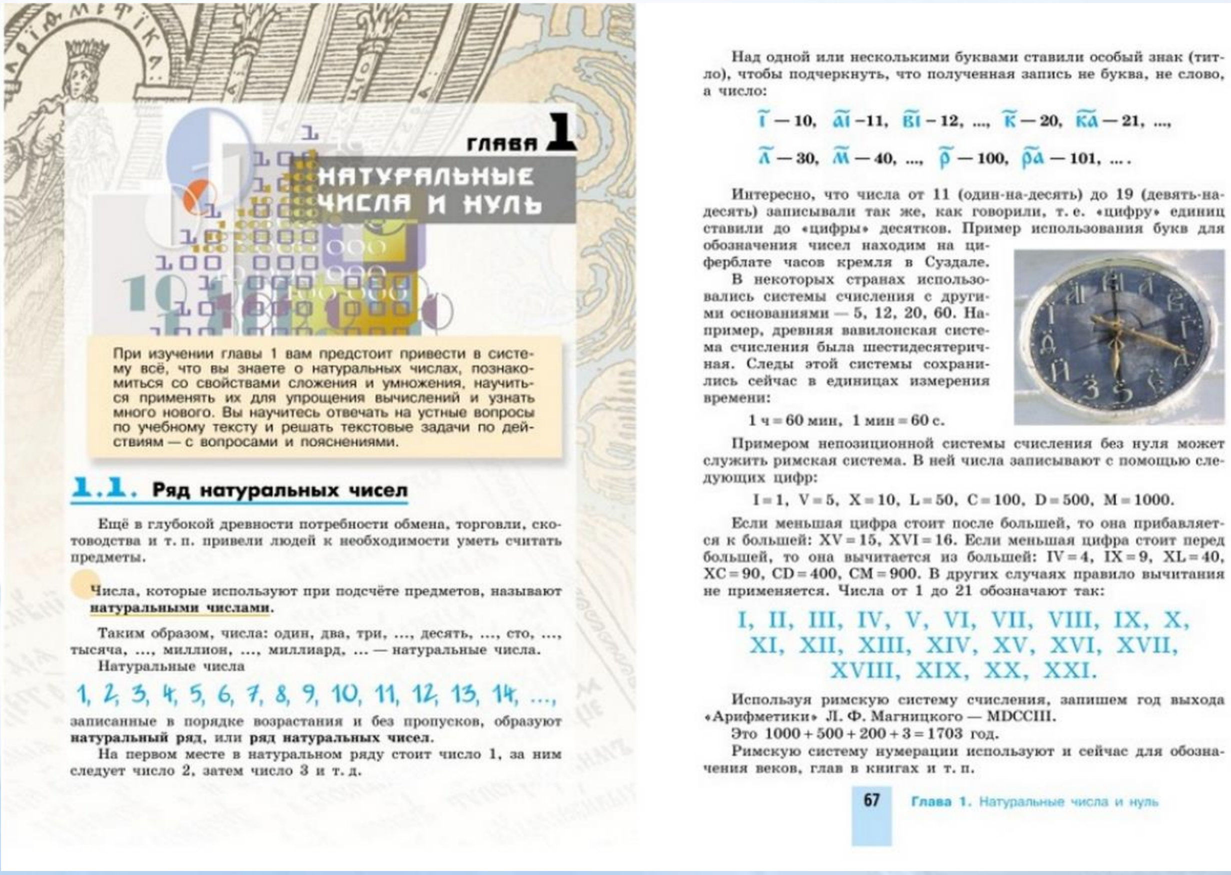
Оглавление

Оглавление

Глава 1. Отношения, пропорции, проценты

Основные направления доработки учебников в связи с принятием ФГОС ОО

- **Вступительная статья авторов о происхождении науки арифметики, цели изучения, структуре учебника**



При изучении главы 1 вам предстоит привести в систему всё, что вы знаете о натуральных числах, познакомиться со свойствами сложения и умножения, научиться применять их для упрощения вычислений и узнать много нового. Вы научитесь отвечать на устные вопросы по учебному тексту и решать текстовые задачи по действиям — с вопросами и пояснениями.

1.1. Ряд натуральных чисел

Ещё в глубокой древности потребности обмена, торговли, скотоводства и т. п. привели людей к необходимости уметь считать предметы.

Числа, которые используют при подсчёте предметов, называют **натуральными числами**.

Таким образом, числа: один, два, три, ..., десять, ..., сто, ..., тысяча, ..., миллион, ..., миллиард, ... — натуральные числа.

Натуральные числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...,

записанные в порядке возрастания и без пропусков, образуют **натуральный ряд**, или **ряд натуральных чисел**.

На первом месте в натуральном ряду стоит число 1, за ним следует число 2, затем число 3 и т. д.

Над одной или несколькими буквами ставили особый знак (титло), чтобы подчеркнуть, что полученная запись не буква, не слово, а число:

і҃ — 10, а҃і — 11, в҃і — 12, ..., к҃ — 20, к҃а — 21, ...,

л҃ — 30, м҃ — 40, ..., р҃ — 100, р҃а — 101, ...

Интересно, что числа от 11 (один-на-десять) до 19 (девять-на-десять) записывали так же, как говорили, т. е. «цифру» единиц ставили до «цифры» десятков. Пример использования букв для обозначения чисел находим на циферблате часов кремля в Суздале.

В некоторых странах использовались системы счисления с другими основаниями — 5, 12, 20, 60. Например, древняя вавилонская система счисления была шестидесятеричная. Следы этой системы сохранились сейчас в единицах измерения времени:

1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 с.

Примером непозиционной системы счисления без нуля может служить римская система. В ней числа записывают с помощью следующих цифр:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Если меньшая цифра стоит после большей, то она прибавляется к большей: XV = 15, XVI = 16. Если меньшая цифра стоит перед большей, то она вычитается из большей: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. В других случаях правило вычитания не применяется. Числа от 1 до 21 обозначают так:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X,
XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII,
XVIII, XIX, XX, XXI.

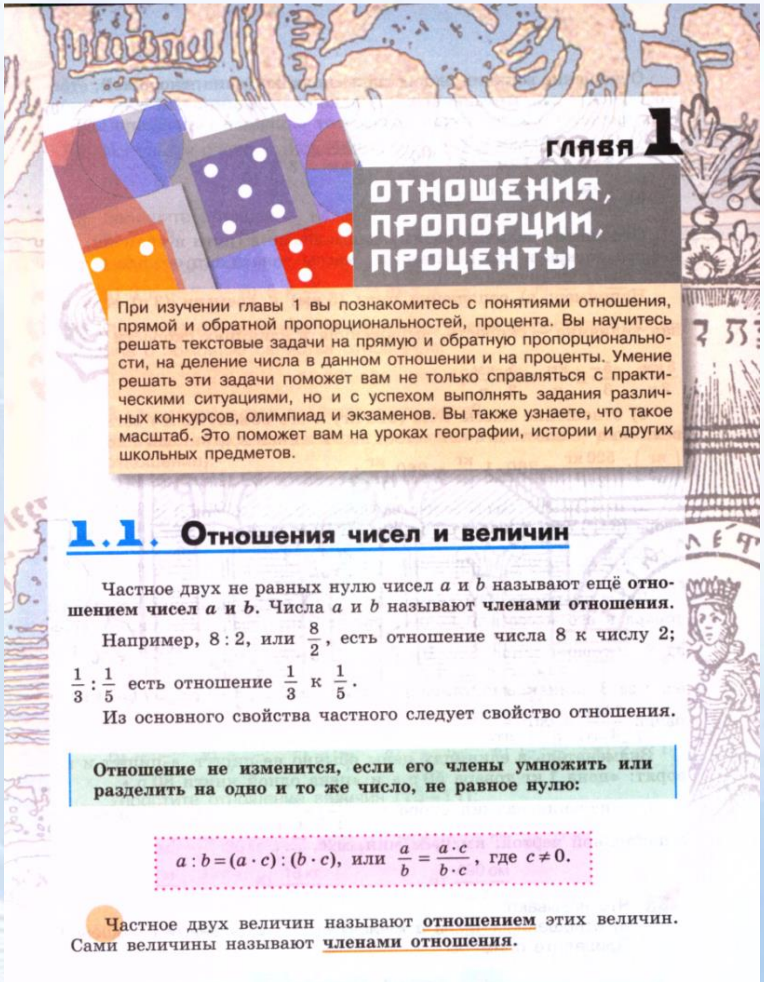
Используя римскую систему счисления, запишем год выхода «Арифметики» Л. Ф. Магницкого — MDCCIII.

Это 1000 + 500 + 200 + 3 = 1703 год.

Римскую систему нумерации используют и сейчас для обозначения веков, глав в книгах и т. п.

67 Глава 1. Натуральные числа и нуль

Основные направления доработки учебников в связи с принятием ФГОС ООО


ГЛАВА 1

ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

При изучении главы 1 вы познакомитесь с понятиями отношения, прямой и обратной пропорциональностей, процента. Вы научитесь решать текстовые задачи на прямую и обратную пропорциональности, на деление числа в данном отношении и на проценты. Умение решать эти задачи поможет вам не только справляться с практическими ситуациями, но и с успехом выполнять задания различных конкурсов, олимпиад и экзаменов. Вы также узнаете, что такое масштаб. Это поможет вам на уроках географии, истории и других школьных предметов.

1.1. Отношения чисел и величин

Частное двух не равных нулю чисел a и b называют ещё **отношением чисел a и b**. Числа a и b называют **членами отношения**.

Например, $8:2$, или $\frac{8}{2}$, есть отношение числа 8 к числу 2; $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ есть отношение $\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{5}$.

Из основного свойства частного следует свойство отношения.

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю:

$$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c), \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}, \text{ где } c\neq 0.$$

Частное двух величин называют **отношением** этих величин. Сами величины называют **членами отношения**.

Преамбулы к главам в которых рассказывается о новых понятиях, раскрывающихся в данной главе и о связи с пройденным материалом

Основные направления доработки учебников в связи с принятием ФГОС ООО

Новые рубрики в задачном материале «Ищем информацию», «Доказываем», «Придумываем задачи», «Исследуем вместе».

Придумываем задачу

1067. Каким натуральным числом можно заменить букву a в условии задачи, чтобы ответ выражался натуральным числом? Найдите несколько таких чисел.
Из пункта A в пункт B против течения реки теплоход плывёт 20 ч. А из пункта B в пункт A — a ч ($6 < a < 18$). За сколько часов из пункта B в пункт A приплывут плоты?

Исторические сведения

С древних времён до нас дошли памятники письменности разных народов. Так, в Древнем Вавилоне (ок. 4000 лет назад) запись делали деревянными палочками на мягкой глине. Получались глиняные таблички, испещрённые клинышками. Среди сохранившихся образцов клинописи есть и математические тексты.

Для обозначения единицы использовали знак 𒁹, десяти — 𒌋 и т. д. Вот несколько примеров таких записей:

1 2 3 4 5 10
11 19 20 30

Основу системы мер веса и денег в Древнем Вавилоне составлял 1 талант; его делили на 60 мин, а мину — на 60 шекелей. Например, 2 таланта 13 мин 41 шекель записывали так:

Позднее в математических текстах так же обозначали и отвлечённые (неименованные) числа. Например, та же запись означала

237 Глава 4. Обыкновенные дроби

Обозначение 𝅗𝅥. (нота с точкой) используется для увеличения длительности наполовину. Например, 𝅗𝅥. = 𝅗𝅥 + ♩, что соответствует равенству $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Рис. 176

Музыкальное произведение состоит из одинаковых по длительности отрезков — тактов. Длительность каждого такта определяет его размер. Он обозначается дробью, так как нижняя цифра обозначает длительность доли (на рисунке 176 — четвертная), а верхняя цифра — количество долей в такте (две доли). Отличие заключается в том, что черту дроби не пишут и дробь не сокращают.

Занимательные задачи

1068. В старых русских руководствах по арифметике использовали такие названия дробей:
$\frac{1}{2}$ — половина, $\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{8}$ — полчеть,
$\frac{1}{16}$ — полполчеть, $\frac{1}{32}$ — полполполчеть.
Определите, каким дробям соответствовали тогда названия: треть, полтреть, полполтреть, полполполтреть.

1069. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Купил полторажды полтора аршина, дал полтретьяжды полтретьи гривны. Сколько надо дать за полдевятажды полдевята аршина?
Примечание. На Руси некоторые смешанные дроби имели свои названия: $1\frac{1}{2}$ — полтора, $2\frac{1}{2}$ — полтрети, $3\frac{1}{2}$ — полчетверта, $4\frac{1}{2}$ — полпята и т. д.
В задаче упоминаются произведения дробей:

$$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2};\ 8\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{2}.$$

240 Глава 4. Обыкновенные дроби

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

Решите задачи **(51—53)** с пояснениями.

51. Сегодня израсходовали 180 р. Это на 100 р. меньше, чем вчера. Сколько рублей израсходовали за два дня?

1) *180 + 100 = 280 (р.) — израсходовали вчера;*

2) ....

Ответ: ....

52. Брату купили 12 тетрадей. Это на 4 тетради больше, чем купили сестре. Сколько тетрадей купили брату и сестре вместе?

....

....

Ответ: ....

53. Алёша весит 39 кг. Его вес на 4 кг меньше, чем вес Бори, и на 1 кг больше, чем вес Вани. Сколько весят три мальчика вместе?

....

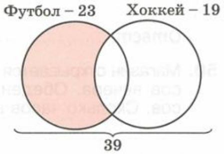
....

....

Ответ: ....

54. В двух спортивных секциях занимается 39 человек: в секции футбола — 23 человека, а в секции хоккея — 19. Сколько человек занимается и футболом, и хоккеем?

Изобразим множества участников секции футбола и секции хоккея в виде двух пересекающихся кругов. Их называют кругами Эйлера.



1) Сколько человек занимается только футболом?

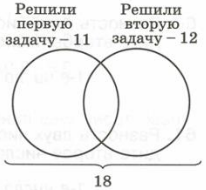
....

2) Сколько человек занимается и футболом, и хоккеем?

....

Ответ: ....

55. В контрольной работе были две сложные задачи. Хотя бы одну из них решили 18 человек: первую задачу решили 11 человек, а вторую задачу — 12 человек. Сколько человек решили обе эти задачи? Используйте в решении круги Эйлера.



1) ....

....

2) ....

....

Ответ: ....

56. Сумма двух чисел на 10 больше первого числа. Найдите второе число.

$\boxed{\text{1-е число}} + \boxed{} = \boxed{\text{сумма}}$

57. Сумма двух чисел на 14 больше второго из них. Найдите первое число.

$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

58. Сумма двух чисел на 4 больше первого числа и на 6 больше второго. Найдите эти числа и сумму.

$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

МГУ-школе

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

Задача 3. Скорость моторной лодки по течению равна 36 км/ч, а скорость этой лодки против течения равна 32 км/ч. Во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения реки?

Решение.

1) $36-32=4$ (км/ч) — удвоенная скорость течения реки;

2) $4:2=2$ (км/ч) — скорость течения реки;

3) $32+2=34$ (км/ч) — собственная скорость моторной лодки;

4) $34:2=17$ (раз) — во столько раз собственная скорость моторной лодки больше скорости течения реки.

Ответ. В 17 раз.

11. Задачи на движение

Задача 1. Почтальон прошёл расстояние между сёлами за 4 ч со скоростью 6 км/ч, а обратно он возвращался на велосипеде со скоростью 12 км/ч. Определим время, которое почтальон потратил на обратный путь.

Решение.

1) $4\cdot 6=24$ (км) — расстояние между сёлами;

2) $24:12=2$ (ч) — время, которое почтальон потратил на обратный путь.

Ответ. 2 ч.

Задача 2. Два пешехода одновременно отправились навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 35 км. Через сколько часов они встретятся, если скорость первого 4 км/ч, а скорость второго 3 км/ч?

Решение.

1) $4+3=7$ (км/ч) — скорость сближения пешеходов;

2) $35:7=5$ (ч) — время движения до встречи.

Ответ. 5 ч.

Задача 3. Велосипедист отправился догонять пешехода, когда расстояние между ними было равно 30 км. Через сколько часов он догонит пешехода, если скорость велосипедиста 15 км/ч, а скорость пешехода 5 км/ч?

Решение.

1) $15-5=10$ (км/ч) — скорость сближения велосипедиста и пешехода;

2) $30:10=3$ (ч) — время, за которое велосипедист догонит пешехода.

Ответ. 3 ч.

Задача 4. Велосипедист и пешеход од
вились из пункта A в пункт B, расстояни
36 км. Скорость велосипедиста 9 км/ч,
6 км/ч. Ровно на середине дороги велосипе
со и дальше шёл пешком со скоростью 4 к
часов после начала движения пешеход дого

Решение.

1) $36:2=18$ (км) — путь велосипедист
кола колеса;

2) $18:9=2$ (ч) — время движения вел
кола колеса;

3) $6\cdot 2=12$ (км) — путь пешехода за 2

4) $18-12=6$ (км) — расстояние между велосипедистом и пешеходом в момент прокола колеса;

5) $6-4=2$ (км/ч) — скорость сближения пешехода и велосипедиста;

6) $6:2=3$ (ч) — время после прокола колеса, за которое пешеход догонит велосипедиста;

7) $2+3=5$ (ч) — время, за которое пешеход догонит велосипедиста.

Ответ. Через 5 ч.

12. Делимость чисел

Пример 1. Какие из чисел 789, 2007, 3528 делятся на 9?

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 9.

Так как сумма цифр $7+8+9=24$ числа 789 не делится на 9, то число 789 не делится на 9;

так как сумма цифр $2+0+0+7=9$ числа 2007 делится на 9, то число 2007 делится на 9;

так как сумма цифр $3+5+2+8=18$ числа 3528 делится на 9, то число 3528 делится на 9.

Ответ. 2007, 3528.

Пример 2. Выпишем все делители числа: а) 125; б) 170.

Решение. а) Разложим число 125 на простые множители:

$$125=5\cdot 5\cdot 5=5^3.$$

Теперь выпишем все делители числа 125:

$$1,\ 5,\ 5^2=25,\ 5^3=125.$$

б) Разложим число 170 на простые множители:

$$170=17\cdot 10=17\cdot 2\cdot 5=2\cdot 5\cdot 17.$$

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ-школе

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

4 Какое из данных неравенств неверно?

1) $-4 > -5$ 2) $1 > -3$ 3) $0 > -1$ 4) $-3 > -2$

5 Найдите сумму модулей наибольшего отрицательного и наименьшего положительного из чисел -4, -7, 6, 8.

1) 10 2) 12 3) 13 4) другой ответ

ТЕСТ 12

1 Выполните сложение: $6 + (-12)$.

1) 6 2) -6 3) -18 4) другой ответ

2 Температура воздуха утром была 13 °С. В течение дня она изменилась на $-6°$. Найдите температуру воздуха вечером.

1) -19 °С 2) -7 °С 3) 19 °С 4) другой ответ

3 Найдите сумму $-7 + (-9) + 5$.

1) -21 2) -15 3) -11 4) другой ответ

4 Вычислите: $387 + (-219)$.

1) 168 2) 188 3) -188 4) другой ответ

5 Найдите сумму всех целых чисел, больших -7, но меньших 6.

1) -7 2) -6 3) -5 4) другой ответ

ТЕСТ 13

1 Вычислите: $-13 + 17$.

1) 30 2) 12 3) 4 4) другой ответ

2 Вычислите значение суммы $93 + 12 + (-93)$.

1) 12 2) 68 3) 19 4) другой ответ

3 К числу 23 прибавьте число, противоположное числу 14.

1) 37 2) 9 3) -9 4) другой ответ

4 Заполните пропуск: $6 + \ldots + 32 = 19$.

1) -17 2) -29 3) -43 4) другой ответ

5 Из данных сумм выберите наибольшую.

1) $-13 + (-24)$ 2) $-17 + (-4)$
3) $-15 + (-13)$ 4) $-11 + (-9)$

12

ТЕСТ 14

1 Выполните вычитание: 3

1) 2 2) -2 3) 8

2 Найдите значение разност

1) -38 2) -18 3) $-$

3 Вычислите: $-1 + 2 - (-3)$

1) -7 2) 2 3) 5

4 Какой из данных примеров решён неверно?

1) $21 + (-23) = -2$ 2) $-17 + 26 = -9$
3) $-7 + (-33) = -40$ 4) $41 + (-23) = 18$

5 Для какого числа a выполнено равенство $a + 23 = 19$?

1) 42 2) 4 3) -4 4) другой ответ

ТЕСТ 15

1 Выполните умножение: $2 \cdot (-22)$.

1) 44 2) -44 3) -11 4) другой ответ

2 Какое из данных произведений наибольшее?

1) $-34 \cdot 25$ 2) $-37 \cdot 22$
3) $-37 \cdot (-22)$ 4) $-34 \cdot (-23)$

3 Вычислите: $52 - 12 \cdot (-4)$.

1) 100 2) 64 3) 4 4) другой ответ

4 Выполните действия: $(-2)^2 + (-1)^3 - (-3)^4$.

1) -78 2) 86 3) 88 4) другой ответ

5 Сколько одинаковых чисел сложили: $(-3) + (-3) + \ldots + (-3) = -81$?

1) 4 2) 18 3) 27 4) другой ответ

ТЕСТ 16

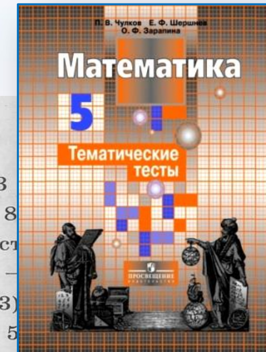
1 Выполните деление: $-182 : (-13)$.

1) -14 2) 14 3) 16 4) другой ответ

2 Среди данных чисел выберите наибольшее.

1) $-27 : (-3)$ 2) $-24 : 6$ 3) $27 : (-3)$ 4) $-24 : (-6)$

13



Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

МГУ-школе

Пусть дан числовой ребус: $\begin{array}{r} +\text{УДАР} \\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА} \end{array}$

Число 8126 является решением ребуса, так как при замене буквы У на цифру 8, буквы Д на 1, буквы А на 2, буквы Р на 6 получается верный пример на сложение.

21. Проверьте, является ли число 5621 решением числового ребуса: УДАР + УДАР = ДРАКА.

22 Решите числовой ребус:

а) $\begin{array}{r} +\text{КИС} \\ \text{КСИ} \\ \hline \text{ИСК} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} +\text{ОДИН} \\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$

в) $\begin{array}{r} +\text{ВАГОН} \\ \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$ г) $\begin{array}{r} +\text{ДЕТАЛЬ} \\ \text{ДЕТАЛЬ} \\ \hline \text{ИЗДЕЛИЕ} \end{array}$

Разберём решение первого ребуса.

Сумма И + С (в разряде десятков) оканчивается на С, но И ≠ 0 (см. разряд единиц). Значит, И = 9 и 1 десяток в разряде единиц запомнили (решение ниже). Теперь легко найти К в разряде сотен: К = 4. Для С остаётся одна возможность: С = 5.

$\begin{array}{r} +\text{КИС} \\ \text{КСИ} \\ \hline \text{ИСК} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +\text{К9С} \\ \text{КС9} \\ \hline \text{9СК} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +\text{49С} \\ \text{4С9} \\ \hline \text{9С4} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +495 \\ 459 \\ \hline 954 \end{array}$

23. Вова любит решать числовые ребусы. Он сам составил три ребуса, но никак не может их решить. Объясните, почему ребусы не имеют решения.

а) $\begin{array}{r} +\text{ШАРИК} \\ \text{МУРКА} \\ \hline \text{ДРУЗЬЯ} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} +\text{САША} \\ \text{МАША} \\ \hline \text{ДРУЖБА} \end{array}$ в) $\begin{array}{r} +\text{ШАР} \\ \text{МИР} \\ \hline \text{ПИР} \end{array}$

Другие задачи

24. Вася записывает последовательность чисел так, что каждое следующее число определяется по очень простому правилу. Определите это правило и запишите следующее число.

а) 3, 13, 23, 33, ...?
б) 11, 101, 1001, ...?
в) 1, 2, 3, 5, 8, ...?
г) 2, 5, 11, 23, 47, ...?
д) 1, 1, 2, 3, 5, ...?
е) 12, 31, 24, 12, 51, ...?

В следующих заданиях требуется определить арифметическое действие, с помощью которого из двух крайних чисел получено среднее, и вместо знака «?» вставить пропущенное число.

25. а) 42(47)5
31(?)8
б) 36(25)11
48(?)12
в) 6(66)11
5(?)12
г) 48(4)12
100(?)5

26. а) 5,4(10)4,6
1,7(?)4,4
б) 2,5(10)4
3,1(?)3
в) 8,9(2,7)6,2
9,1 (?)1,8
г) 3,6(0,9)4
7,2(?)0,8

ФГОС

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Математика»

МГУ-школе

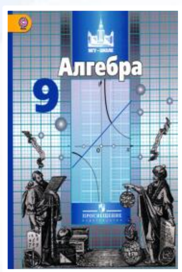
ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Основное общее образование. Алгебра 7-9 классы.

Линия УМК Ю. М. Колягин и др.
7-9 классы 1.2.3.2.4.1-2-3

Линия УМК под редакцией С. А. Теляковского.
7-9 классы 1.2.3.2.5.1-2-3

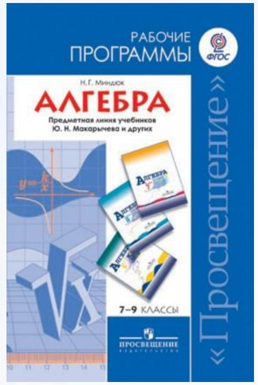


Линия УМК «МГУ – школе» С. М. Никольского и др.
7-9 классы 1.2.3.2.11.1-2-3

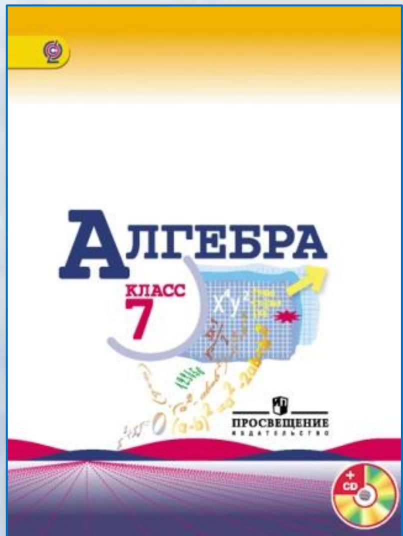
Линия УМК под редакцией Г. В. Дорофеева
7-9 классы **1.2.3.2.3.1-2-3**

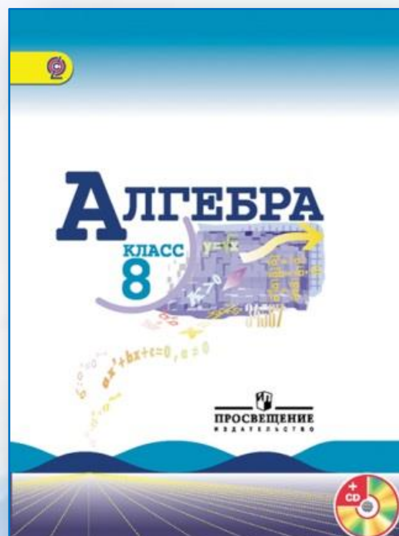
АЛГЕБРА

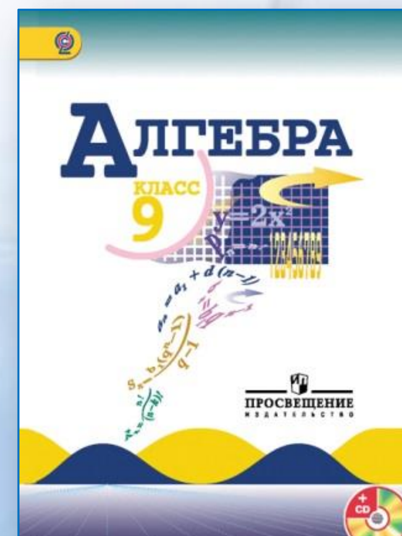
- **Ю.Н. МАКАРЫЧЕВ И ДР.**



- Рабочая программа
- Учебник с электронным приложением (7-9 кл.)
- Рабочая тетрадь (в 2-х частях)
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Книга для учителя







ФГОС

85!
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Особенности линии УМК Ю. Н. Макарычева «Алгебра 7-9» под редакцией С. А. Теляковского

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет — *алгебру*, являющуюся одним из важнейших разделов математики.

Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов решения разнообразных задач. Алгебра используется в современном мире очень широко: в физике, биологии, экономике, информатике, архитектуре и др.

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы научились выполнять различные действия с целыми числами и дробями, находить корни уравнений, решать текстовые задачи. В 7 классе вы узнаете ещё много нового. Вы научитесь выполнять различные тождественные преобразования: сложение, вычитание и умножение многочленов, разложение многочленов на множители и многое другое. Это даст вам возможность решать разнообразные задачи. Впервые вы узнаете о способах решения систем уравнений с двумя переменными. Теперь вы сможете решать текстовые задачи, используя не только уравнения с одной переменной, но и системы уравнений с двумя переменными. Вы познакомитесь со свойствами некоторых функций, научитесь строить их графики. Знания и умения, приобретённые на уроках алгебры в 7 классе, помогут вам при изучении многих школьных предметов: геометрии, информатики, физики, химии и др.

Надеемся, что, занимаясь по этому учебнику, вы полюбите новый учебный предмет — алгебру. Для этого, прежде всего, написанное в нём должно быть понятно. Поэтому в объяснительных текстах подробно разъясняется новый материал, приводятся решения различных задач. Они помогут вам разобраться в изучаемых приёмах преобразования выражений, решения уравнений, построения графиков функций и др. Материал, который

39. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $5y + 2$; б) $\frac{18}{y}$; в) $\frac{1}{x-7}$; г) $\frac{m-1}{4}$; д) $\frac{7a}{3+a}$; е) $\frac{2b}{10-b}$?

40. Какое из данных выражений имеет смысл при любых значениях a?
1. $\frac{12}{a-9}$ 2. $\frac{5}{a+4}$ 3. $\frac{14}{a^2}$ 4. $\frac{8}{a^2+1}$

41. Составьте формулу числа:
а) кратного 5; б) кратного 10; в) кратного 101.

42. Напишите формулу числа, кратного 7. Найдите по этой формуле два трёхзначных числа, кратных 7.

43. *(Для работы в парах.)* Докажите, что всякое простое число, начиная с 5, увеличенное или уменьшенное на 1, делится на 6.
1) Проверьте утверждение на примерах. Одному учащемуся рекомендуем взять простые числа из третьего десятка, другому — из седьмого десятка.
2) Обсудите друг с другом, из чего следует справедливость указанного свойства.
3) Проведите доказательство.

44. Найдите число, если известно, что:
а) 3% этого числа равны 1,8;
б) 85% этого числа равны 17;
в) 130% этого числа равны 3,9;
г) 6,2% этого числа равны 9,3.

45. После того как из бидона отлили 30% молока, в нём осталось 14 л. Сколько литров молока было в бидоне первоначально?

46. Перевыполнив план на 15%, завод выпустил за месяц 230 станков. Сколько станков должен был выпустить за месяц завод по плану?

3. Сравнение значений выражений

Решим задачу: «Пшеницей засеяли два опытных участка площадью 48 га и 60 га. С первого участка собрали 1800 ц пшеницы, а со второго 2100 ц. На каком участке урожайность выше?»

Урожайность выражается частным от деления массы пшеницы, собранной с участка, на площадь участка. Чтобы узнать, на каком участке урожайность выше, надо сравнить значения выражений 1800 : 48 и 2100 : 60. Так как 1800 : 48 = 37,5; 2100 : 60 = 35, то урожайность выше на первом участке.

Особенности линии УМК Ю. Н. Макарычева «Алгебра 7-9» под редакцией С. А. Теляковского

6. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Рассмотрим другие частные случаи квадратичной функции.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

▶ С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(1)

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ изображён на рисунке 25, *а*.

Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ при тех же значениях аргумента, следует к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5	11

(2)

Построим точки, координаты которых указаны в таблице (2), и соединим их плавной линией. Получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ (рис. 25, *б*).

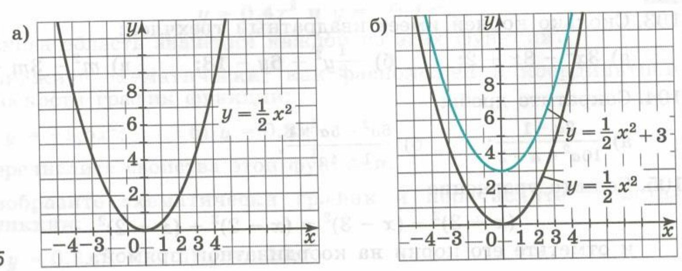


Рис. 25

Легко понять, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; y_0 + 3)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ и наоборот. Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вверх, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из некоторой точки первого графика с помощью параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси y.

График функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ — парабола, полученная в результате сдвига вверх на 3 единицы графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y = ax^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Пример 2. Арка моста имеет форму параболы (рис. 26). Мост удерживают три опоры, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Найдём длины этих опор, если известно, что $AB = 80$ м, $OC = 8$ м, $AK = KO = OL = LB$.

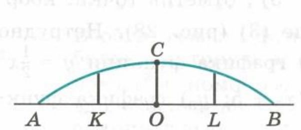


Рис. 26

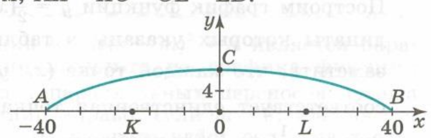


Рис. 27

▶ Составим уравнение параболы, выбрав систему координат так, как показано на рисунке 27. Очевидно, что это уравнение имеет вид $y = ax^2 + n$. Найдём координаты точек A, B и C. Имеем

$$A(-40; 0),\ B(40; 0),\ C(0; 8).$$

Вершиной параболы является точка $C(0; 8)$. Значит, $n = 8$. Для отыскания коэффициента a подставим в уравнение $y = ax^2 + 8$ координаты точки $B(40; 0)$: $0 = a \cdot 1600 + 8$. Отсюда $a = -\frac{8}{1600} = -0{,}005$. Мы получили уравнение параболы

$$y = -0{,}005x^2 + 8.$$

Методический шлейф к УМК Ю.Н. Макарычева «Алгебра»

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Методический шлейф к УМК Ю.Н. Макарычева «Алгебра»

6. Сколько корней имеет уравнение $x^n=-100$:

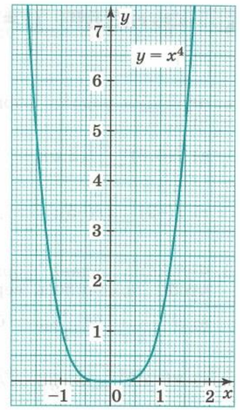
а) при чётном значении n;
б) при нечётном значении n?

Ответ: а) .... б) ....

7. Пользуясь графиком функции $y=x^4$, решите уравнение:

а) $x^4=3$; б) $x^4=6{,}5$.

Ответ: а) .... б) ....



II

Существует ли такое натуральное число n, при котором график функции $y=x^n$ проходит через данную точку:

а) $A(-5; -125)$; б) $B(2{,}5; 7{,}5)$;
в) $C(\sqrt{2}; 64)$; г) $D(-4; 1024)$?

При положительном ответе укажите это значение n.

Ответ: а) .... б) .... в) .... г) ....

Решите уравнение:

а) $x^4=0{,}0625$; б) $2x^5=-64$; в) $5x^6-5=0$; г) $x^3=-0{,}216$.

....

....

....

....

Ответ: а) .... б) .... в) .... г) ....

10. При каком значении n график функции $y=x^n$ проходит через точку:

а) $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{27}\right)$; б) $B(0{,}2; 0{,}0016)$; в) $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{64}\right)$?

Ответ: а) .... б) .... в) ....

11. С помощью стрелок укажите, каким числом (положительным, отрицательным или нулём) является разность.

$\boxed{10^7-(-4)^7}$ $\boxed{0{,}9^6-0{,}2^6}$ $\boxed{(-4)^9-4^9}$ $\boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^8-(-0{,}6)^8}$

Положительное число | Нуль | Отрицательное число

$\boxed{0{,}99^{10}-1}$ $\boxed{(-1{,}2)^3-(-1{,}6)^3}$ $\boxed{(-0{,}5)^6-(-0{,}3)^6}$ $\boxed{\left(\frac{7}{8}\right)^5-\left(\frac{8}{9}\right)^5}$

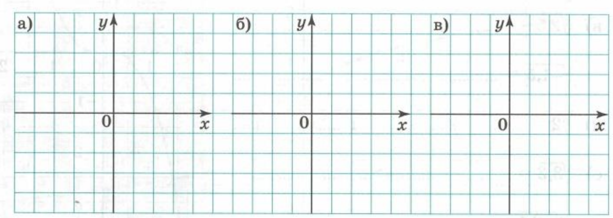
....

....

....

12. С помощью схематических графиков определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $x^7=4x$; б) $x^6=4x$; в) $x^3=-x+1$.



Ответ: а) .... б) .... в) ....

Методический шлейф к УМК Ю.Н. Макарычева «Алгебра»

5. Зная, что $2{,}5<a<2{,}6$ и $2{,}0<b<2{,}1$, оцените значение выражения a^2+b^2.

6. Оцените значение выражения:

а) $2a+3b$, если $0<a<1$ и $-5<b<-4$;

… если $0<a<3$ и $-1<b<0$;

… если $1{,}5<a<3$ и $0<b<4$;

… если $1{,}2<a<1{,}3$ и $0{,}4<b<0{,}5$.

…, что $3\leqslant a\leqslant 5$ и $1\leqslant b\leqslant 4$, оцените разность … роизведение $b(a-3)$. Сравните результаты.

…ните величину угла C в треугольнике ABC, …тно, что $36°\leqslant\angle A\leqslant 37°$, $66°\leqslant\angle B\leqslant 67°$.

…ните среднюю линию трапеции с основаниями …м, если $15{,}2\leqslant a\leqslant 15{,}6$, $10{,}4\leqslant b\leqslant 10{,}8$.

Оценка погрешности приближения

…дите абсолютную погрешность приближения:

…,87 числом 2,9; числом 2,8;

б) числа 0,6595 числом 0,7; числом 0,6;

в) числа $\frac{3}{22}$ числом $\frac{1}{7}$;

г) числа $\frac{1}{3}$ числом 0,3.

2. Приближенное значение числа x равно a. Найдите абсолютную погрешность приближения, если:

а) $x=3{,}76$, $a=3{,}8$; в) $x=9{,}653$, $a=9{,}7$;
б) $x=38{,}1$, $a=38$; г) $x=26{,}48$, $a=26$.

3. Запишите в виде двойного неравенства:

1) а) $y=7\pm 1$; б) $m=27\pm 3$; в) $a=2300\pm 100$;
2) а) $c=23\pm 0{,}1$; б) $x=16{,}5\pm 0{,}5$; в) $u=12\pm 0{,}4$;
3) а) $b=5{,}82\pm 0{,}01$; б) $z=30{,}42\pm 0{,}05$; в) $n=6{,}174\pm 0{,}001$.

4. Найдите приближенное значение числа x, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если:

1) а) $18\leqslant x\leqslant 22$; б) $10\leqslant x\leqslant 11$;
2) а) $5{,}8\leqslant x\leqslant 6$; б) $15{,}6\leqslant x\leqslant 15{,}8$;
3) а) $3{,}58\leqslant x\leqslant 3{,}64$; б) $24{,}3\leqslant x\leqslant 24{,}8$.

---

5. Докажите, что среднее арифметическое чисел a и b является приближенным значением каждого из этих чисел с точностью до $\frac{a-b}{2}$.

38

I С—38. Округление чисел

1. Округлите число:

1) а) 35,7 до единиц; б) 289 до десятков;
2) а) 82,3591 до десятых; б) 0,53748 до тысячных;
3) а) 3847,5 до сотен;
б) 1,384795 до десятитысячных.

2. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной и округлите ее до тысячных:

а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{4}{15}$; г) $1\frac{5}{11}$; д) $20\frac{6}{13}$; е) $2\frac{7}{19}$.

Найдите абсолютную погрешность приближения.

---

3. Докажите, что каждое из чисел 0,38 и 0,39 является приближенным значением числа $\frac{5}{13}$ с точностью до 0,01. Какое из них является приближенным значением числа $\frac{5}{13}$ с точностью до 0,005?

I С—39. Относительная погрешность

1. Округлите число до единиц и найдите относительную погрешность округления:

а) 2,1; б) 5,12; в) 9,736; г) 49,54.

2. Представьте каждое из чисел $2\frac{5}{8}$ и $14\frac{11}{16}$ в виде десятичной дроби. Округлив полученные дроби до сотых, найдите абсолютную и относительную погрешности приближений.

3. Радиус Земли равен 6380 км с точностью до 10 км. Оцените относительную погрешность приближенного значения.

---

4. Сравните качества измерения длины L реки Волги и диаметра d мячика для настольного тенниса, если $L\approx 3530$ км (с точностью до 5 км) и $d\approx 38$ мм (с точностью до 1 мм).

I С—40. Пересечение и объединение множеств

1. Найдите пересечение и объединение множеств букв, которые используются в записи слов «типография» и «фотография».

39

Методический шлейф к УМК Ю.Н. Макарычева «Алгебра»

ЧАСТЬ 2

5 Вычислите: $\dfrac{25 \cdot 5^8}{(5^2)^3}$.

Ответ: ____________

6 Постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 2x$. Найдите координаты точек их пересечения.

Ответ: ____________

7 Графики функций $y = 3x + b$ и $y = kx - 6$ симметричны относительно оси абсцисс.

а) Найдите числа b и k.
б) Найдите координаты точки пересечения графиков этих функций.

Ответ: ____________

Степень и ее свойства. Одночлены. Функции $y = x^2$, $y = x^3$ и их графики

Тест 4 — *Вариант 4*

ЧАСТЬ 1

1 Вычислите: $(-5)^3 + 4^2$.

1) -7 2) -109 3) 31 4) 141

2 Запишите произведение $0{,}007 \cdot 10^5$ в виде натурального числа.

1) 70 2) 70 000
3) 7000 4) 700

3 Упростите выражения $Y = y^7 \cdot y^4$; $A = a^7 : a^5$; $B = (b^5)^3$. Укажите номер таблицы с тремя верными ответами.

1)

Y	A	B
y^{11}	a^2	b^8

2)

Y	A	B
y^{28}	a^2	b^{15}

3)

Y	A	B
y^{11}	a^2	b^{15}

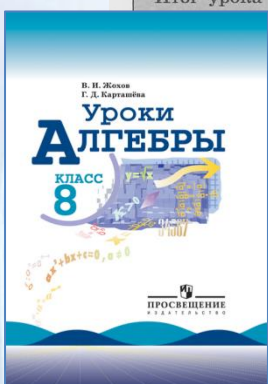
4)

Y	A	B
y^{28}	a^{12}	b^{15}

4 Представьте выражение $0{,}5c^2d \cdot (4cd^3)^2$ в виде одночлена стандартного вида.

1) $8c^4d^7$ 2) $8c^4d^6$
3) $80c^4d^7$ 4) $2c^4d^7$

Методический шлейф к УМК Ю.Н. Макарычева «Алгебра»



6-я неделя

Пункт учебника	п. 6	п. 7	
	16	17	18
	У-14		
		п. 7 учебника, примеры 1—3	
	138 *б, в* 139 *а, в* 141	148 *б, г* 149 *б, г* 150 *а*	152 *в* 154 *б, в* 155 *а* 243 *в*
	146 147	174 *а*	175 *а*
Итог урока	С. р. В-1: 140 *а* 142 *а* В-2: 140 *б* 142 *б*	С. р. В-1: 151 *а* 152 *а* В-2: 151 *б* 152 *б*	С. р. В-1: Сб.: № 1.12 (1) В-2: Сб.: № 1.12 (2) или ДМ: С-11, № 1 (1 *а, б*, 2 *а, б*)
	Повторить пп. 3—6 учебника 138 *а, г* 139 *б, г* 226 *а, в* 231 *а, б, в*	п. 7 учебника 148 *а, в* 149 *а, в* 150 *б* Сб.: № 1.11 (1)	152 *г* 154 *а, г* 155 *б* 243 *г* Сб.: № 1.11 (2)

...те в виде дроби:

в) $\frac{a}{3} : a$; д) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{b}{b-a}$;

б) $y : \frac{1}{x}$; г) $\frac{a+1}{a-3} : \frac{a+1}{x}$; е) $\left(\frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x}\right)^2$.

2. Укажите область определения и вид функции:

а) $y = \frac{1}{2}x - 3$; б) $y = \frac{x-4}{2}$.

18

7-я неделя

Пункт учебника	п. 7		п. 8
Номер урока	19	20	21
Устные упражнения			У-15
Изучение нового			п. 8 учебника
Тренировочные упражнения	156 *а* 157 159 *а* 161 *а*	244 *а* 245 249 *а*	179 185
Повторение	174 *б*	175 *б*	195
Итог урока	С. р. В-1: Сб.: № 1.15 (1) В-2: Сб.: № 1.15 (2) или ДМ: С-11, № 2	С. р. В-1: Сб.: № 1.32 (1) В-2: Сб.: № 1.32 (2) или ДМ: С-11, № 3, 5	Ответить на контрольные вопросы 3, 4 (с. 49 учебника)
Задание на дом	156 *б* 158 159 *б* 161 *б* Сб.: № 1.28 (1)	244 *б* 249 *б* Сб.: № 1.33 (1) № 1.34 (1)	п. 8 учебника 180 186 194

► **У-15**

1. Как называются функции, задаваемые формулами:

$y = 2x + 3$; $y = -\frac{1}{2}x + 4$; $y = 2x$; $y = -3x$; $y = x^2$; $y = -2x^2$?

Что представляют собой их графики? Как они расположены? Укажите область определения и область значений каждой из функций.

2. Сократите дробь:

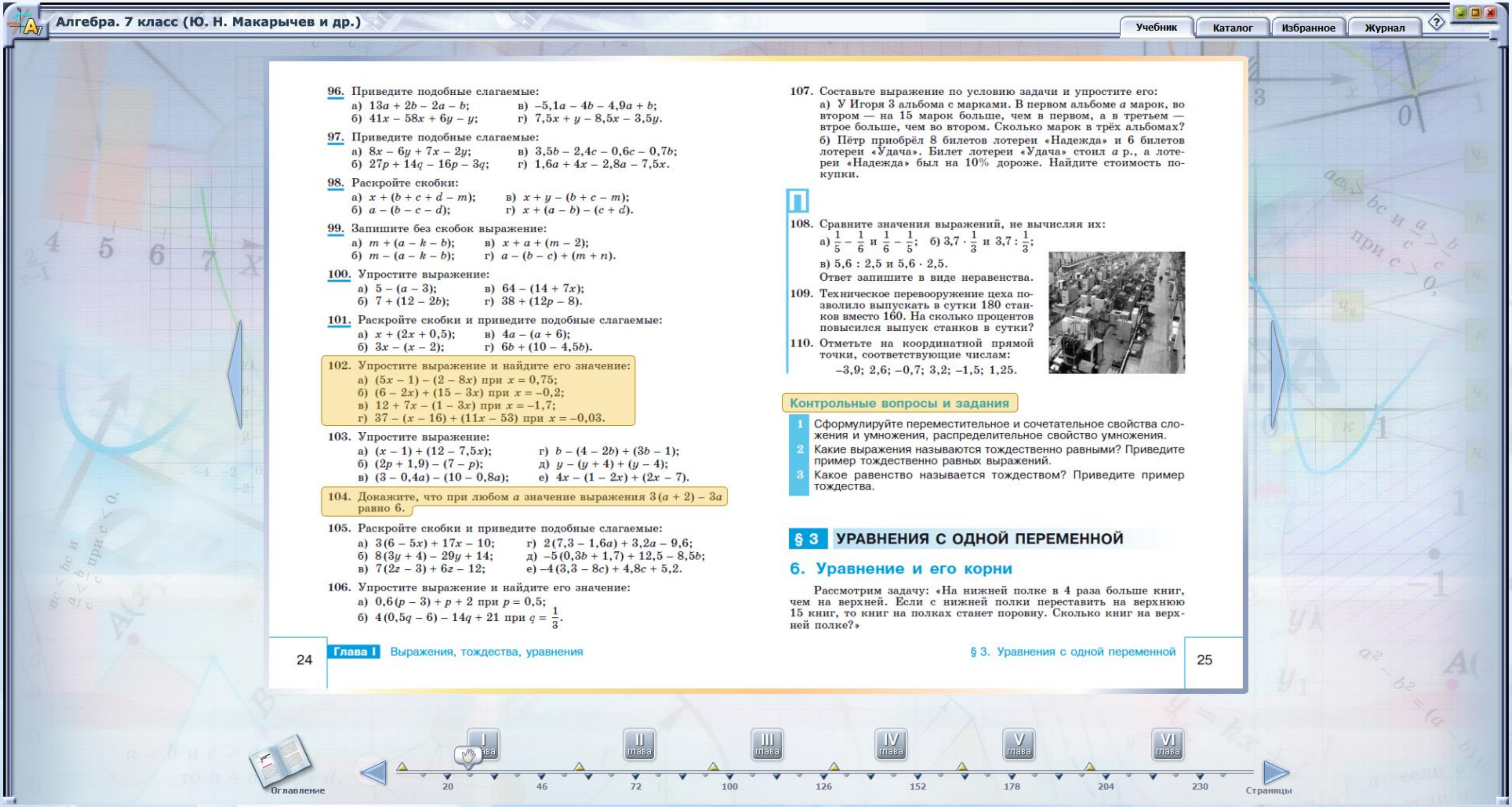
а) $\frac{a^2-9}{a+3}$; б) $\frac{a-3}{a^2-9}$; в) $\frac{a+3}{|a|-3}$ при $a < 0$.

19

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Электронное приложение



96. Приведите подобные слагаемые:
а) $13a + 2b - 2a - b$; в) $-5{,}1a - 4b - 4{,}9a + b$;
б) $41x - 58x + 6y - y$; г) $7{,}5x + y - 8{,}5x - 3{,}5y$.

97. Приведите подобные слагаемые:
а) $8x - 6y + 7x - 2y$; в) $3{,}5b - 2{,}4c - 0{,}6c - 0{,}7b$;
б) $27p + 14q - 16p - 3q$; г) $1{,}6a + 4x - 2{,}8a - 7{,}5x$.

98. Раскройте скобки:
а) $x + (b + c + d - m)$; в) $x + y - (b + c - m)$;
б) $a - (b - c - d)$; г) $x + (a - b) - (c + d)$.

99. Запишите без скобок выражение:
а) $m + (a - k - b)$; в) $x + a + (m - 2)$;
б) $m - (a - k - b)$; г) $a - (b - c) + (m + n)$.

100. Упростите выражение:
а) $5 - (a - 3)$; в) $64 - (14 + 7x)$;
б) $7 + (12 - 2b)$; г) $38 + (12p - 8)$.

101. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) $x + (2x + 0{,}5)$; в) $4a - (a + 6)$;
б) $3x - (x - 2)$; г) $6b + (10 - 4{,}5b)$.

102. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $(5x - 1) - (2 - 8x)$ при $x = 0{,}75$;
б) $(6 - 2x) + (15 - 3x)$ при $x = -0{,}2$;
в) $12 + 7x - (1 - 3x)$ при $x = -1{,}7$;
г) $37 - (x - 16) + (11x - 53)$ при $x = -0{,}03$.

103. Упростите выражение:
а) $(x - 1) + (12 - 7{,}5x)$; г) $b - (4 - 2b) + (3b - 1)$;
б) $(2p + 1{,}9) - (7 - p)$; д) $y - (y + 4) + (y - 4)$;
в) $(3 - 0{,}4a) - (10 - 0{,}8a)$; е) $4x - (1 - 2x) + (2x - 7)$.

104. Докажите, что при любом a значение выражения $3(a + 2) - 3a$ равно 6.

105. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) $3(6 - 5x) + 17x - 10$; г) $2(7{,}3 - 1{,}6a) + 3{,}2a - 9{,}6$;
б) $8(3y + 4) - 29y + 14$; д) $-5(0{,}3b + 1{,}7) + 12{,}5 - 8{,}5b$;
в) $7(2z - 3) + 6z - 12$; е) $-4(3{,}3 - 8c) + 4{,}8c + 5{,}2$.

106. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $0{,}6(p - 3) + p + 2$ при $p = 0{,}5$;
б) $4(0{,}5q - 6) - 14q + 21$ при $q = \frac{1}{3}$.

107. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:
а) У Игоря 3 альбома с марками. В первом альбоме a марок, во втором — на 15 марок больше, чем в первом, а в третьем — втрое больше, чем во втором. Сколько марок в трёх альбомах?
б) Пётр приобрёл 8 билетов лотереи «Надежда» и 6 билетов лотереи «Удача». Билет лотереи «Удача» стоил a р., а лотереи «Надежда» был на 10% дороже. Найдите стоимость покупки.

П

108. Сравните значения выражений, не вычисляя их:
а) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$; б) $3{,}7 \cdot \frac{1}{3}$ и $3{,}7 : \frac{1}{3}$;
в) $5{,}6 : 2{,}5$ и $5{,}6 \cdot 2{,}5$.
Ответ запишите в виде неравенства.

109. Техническое перевооружение цеха позволило выпускать в сутки 180 станков вместо 160. На сколько процентов повысился выпуск станков в сутки?

110. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:
$-3{,}9$; $2{,}6$; $-0{,}7$; $3{,}2$; $-1{,}5$; $1{,}25$.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения.

2 Какие выражения называются тождественно равными? Приведите пример тождественно равных выражений.

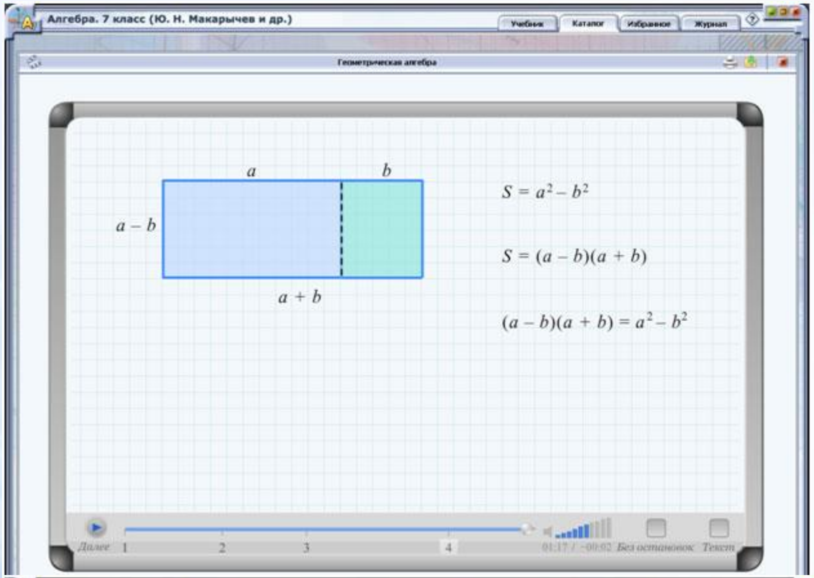
3 Какое равенство называется тождеством? Приведите пример тождества.

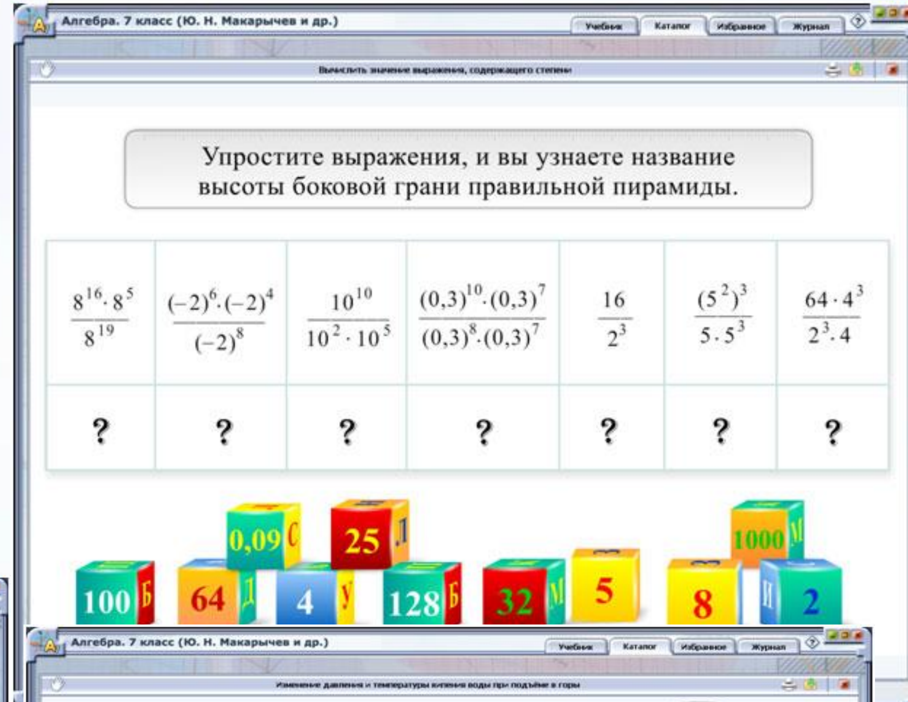
§ 3 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

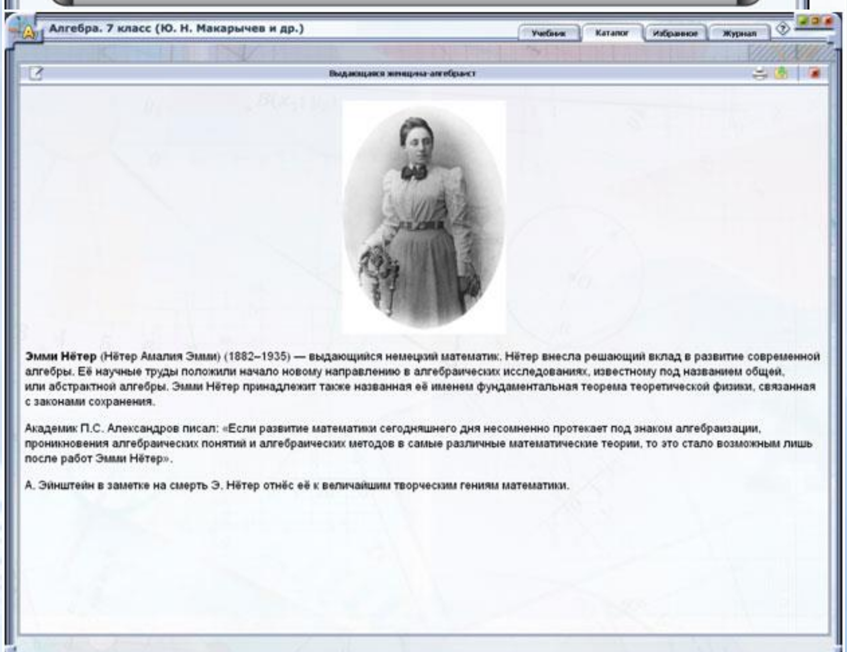
6. Уравнение и его корни

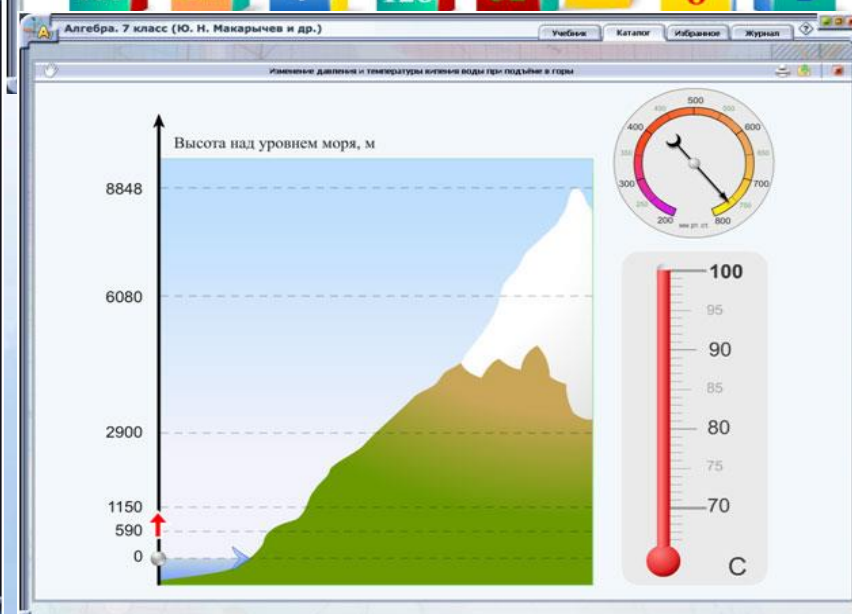
Рассмотрим задачу: «На нижней полке в 4 раза больше книг, чем на верхней. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на верхней полке?»

Электронное приложение





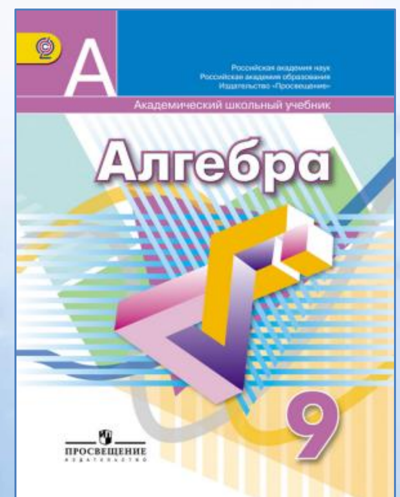


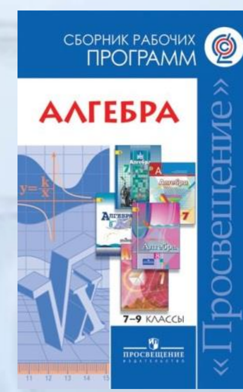


АЛГЕБРА

- **Г.В. ДОРОФЕЕВ И ДР.**

- Рабочая программа
- Учебник (7-9 кл.)
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Методические рекомендации
- Контрольные работы
- Книга для учителя

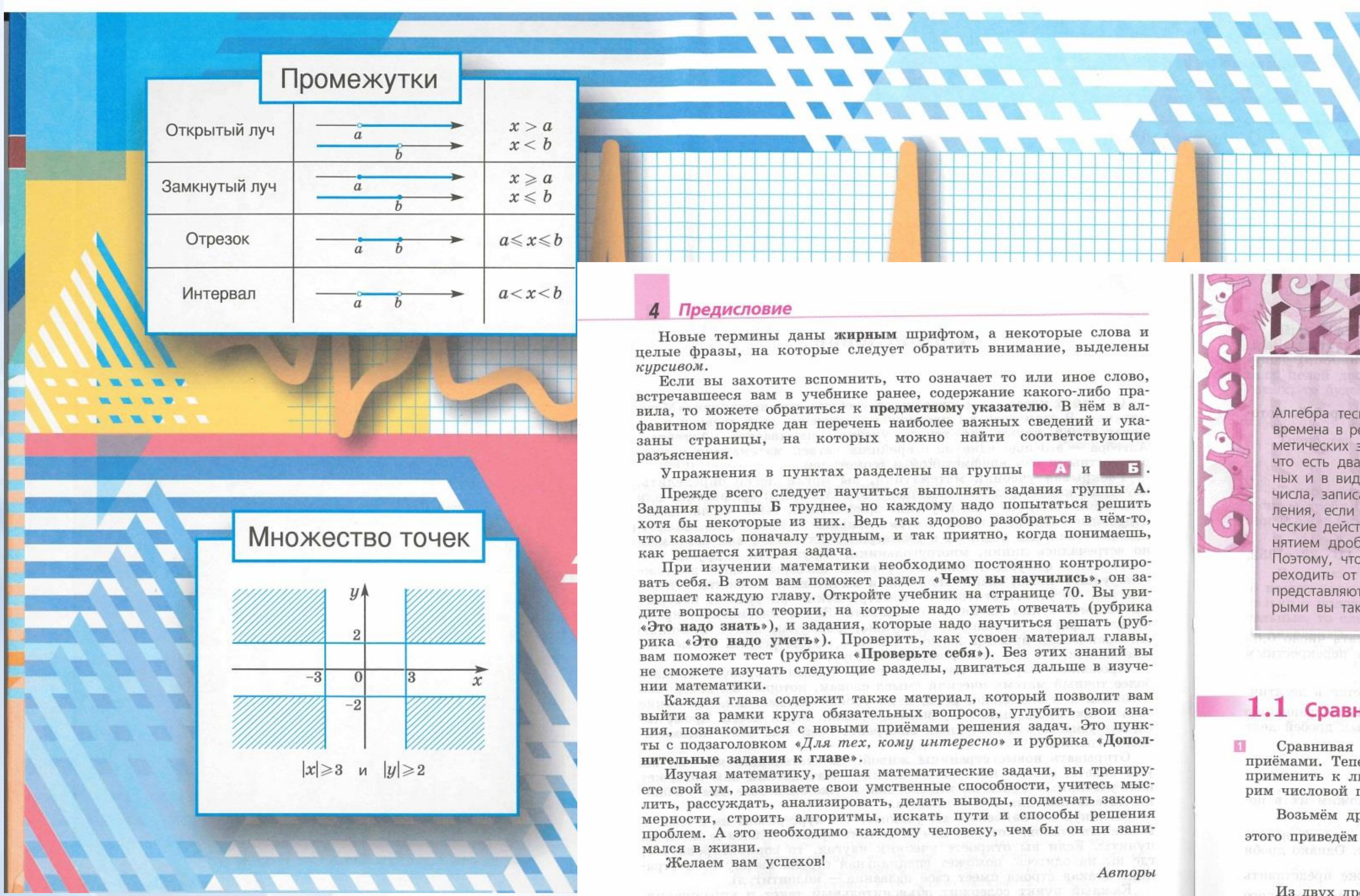


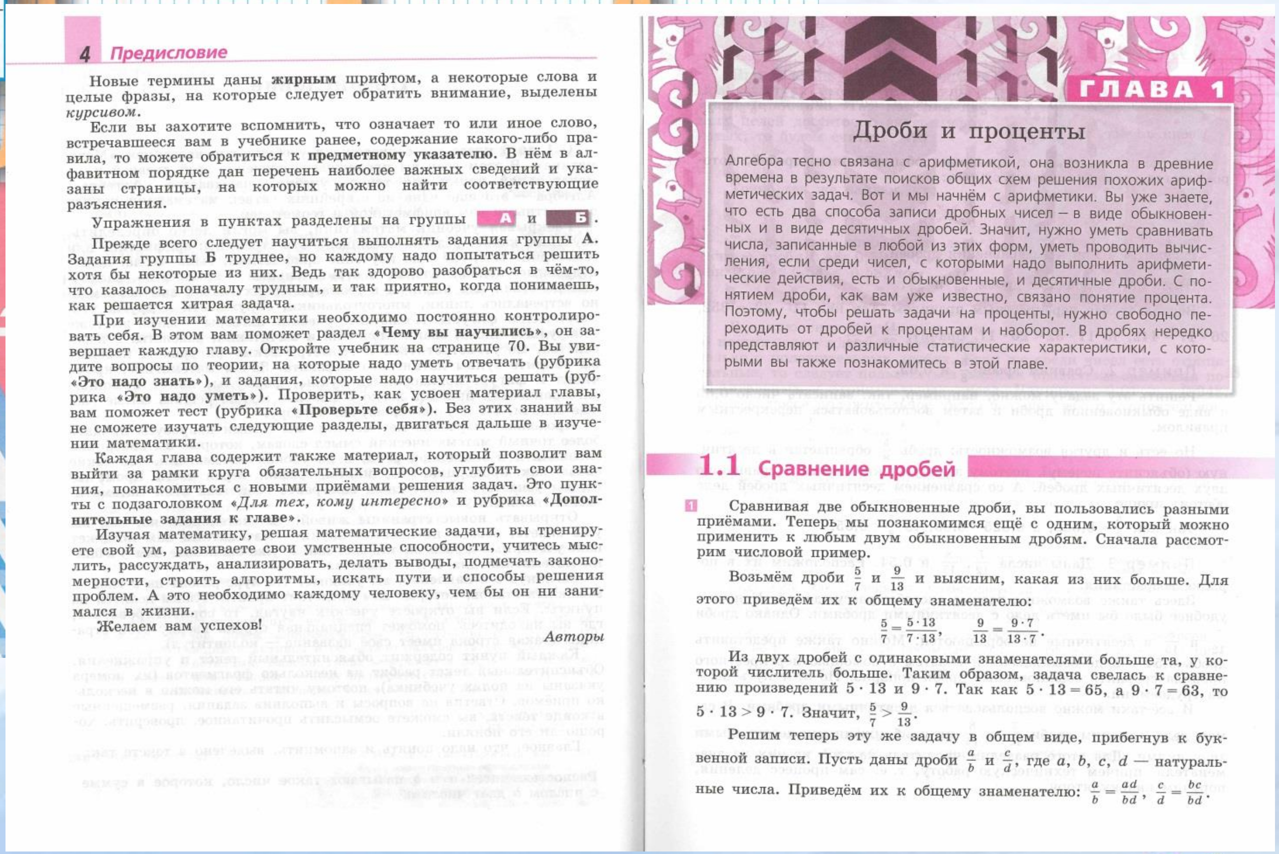


ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Особенности линии УМК «Алгебра 7-9 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева





Новые термины даны **жирным** шрифтом, а некоторые слова и целые фразы, на которые следует обратить внимание, выделены *курсивом*.

Если вы захотите вспомнить, что означает то или иное слово, встречавшееся вам в учебнике ранее, содержание какого-либо правила, то можете обратиться к **предметному указателю**. В нём в алфавитном порядке дан перечень наиболее важных сведений и указаны страницы, на которых можно найти соответствующие разъяснения.

Упражнения в пунктах разделены на группы А и Б.

Прежде всего следует научиться выполнять задания группы **А**. Задания группы **Б** труднее, но каждому надо попытаться решить хотя бы некоторые из них. Ведь так здорово разобраться в чём-то, что казалось поначалу трудным, и так приятно, когда понимаешь, как решается хитрая задача.

При изучении математики необходимо постоянно контролировать себя. В этом вам поможет раздел **«Чему вы научились»**, он завершает каждую главу. Откройте учебник на странице 70. Вы увидите вопросы по теории, на которые надо уметь отвечать (рубрика **«Это надо знать»**), и задания, которые надо научиться решать (рубрика **«Это надо уметь»**). Проверить, как усвоен материал главы, вам поможет тест (рубрика **«Проверьте себя»**). Без этих знаний вы не сможете изучать следующие разделы, двигаться дальше в изучении математики.

Каждая глава содержит также материал, который позволит вам выйти за рамки круга обязательных вопросов, углубить свои знания, познакомиться с новыми приёмами решения задач. Это пункты с подзаголовком «*Для тех, кому интересно*» и рубрика **«Дополнительные задания к главе»**.

Изучая математику, решая математические задачи, вы тренируете свой ум, развиваете свои умственные способности, учитесь мыслить, рассуждать, анализировать, делать выводы, подмечать закономерности, строить алгоритмы, искать пути и способы решения проблем. А это необходимо каждому человеку, чем бы он ни занимался в жизни.

Желаем вам успехов!

Авторы

ГЛАВА 1

Дроби и проценты

Алгебра тесно связана с арифметикой, она возникла в древние времена в результате поисков общих схем решения похожих арифметических задач. Вот и мы начнём с арифметики. Вы уже знаете, что есть два способа записи дробных чисел – в виде обыкновенных и в виде десятичных дробей. Значит, нужно уметь сравнивать числа, записанные в любой из этих форм, уметь проводить вычисления, если среди чисел, с которыми надо выполнить арифметические действия, есть и обыкновенные, и десятичные дроби. С понятием дроби, как вам уже известно, связано понятие процента. Поэтому, чтобы решать задачи на проценты, нужно свободно переходить от дробей к процентам и наоборот. В дробях нередко представляют и различные статистические характеристики, с которыми вы также познакомитесь в этой главе.

1.1 Сравнение дробей

1 Сравнивая две обыкновенные дроби, вы пользовались разными приёмами. Теперь мы познакомимся ещё с одним, который можно применить к любым двум обыкновенным дробям. Сначала рассмотрим числовой пример.

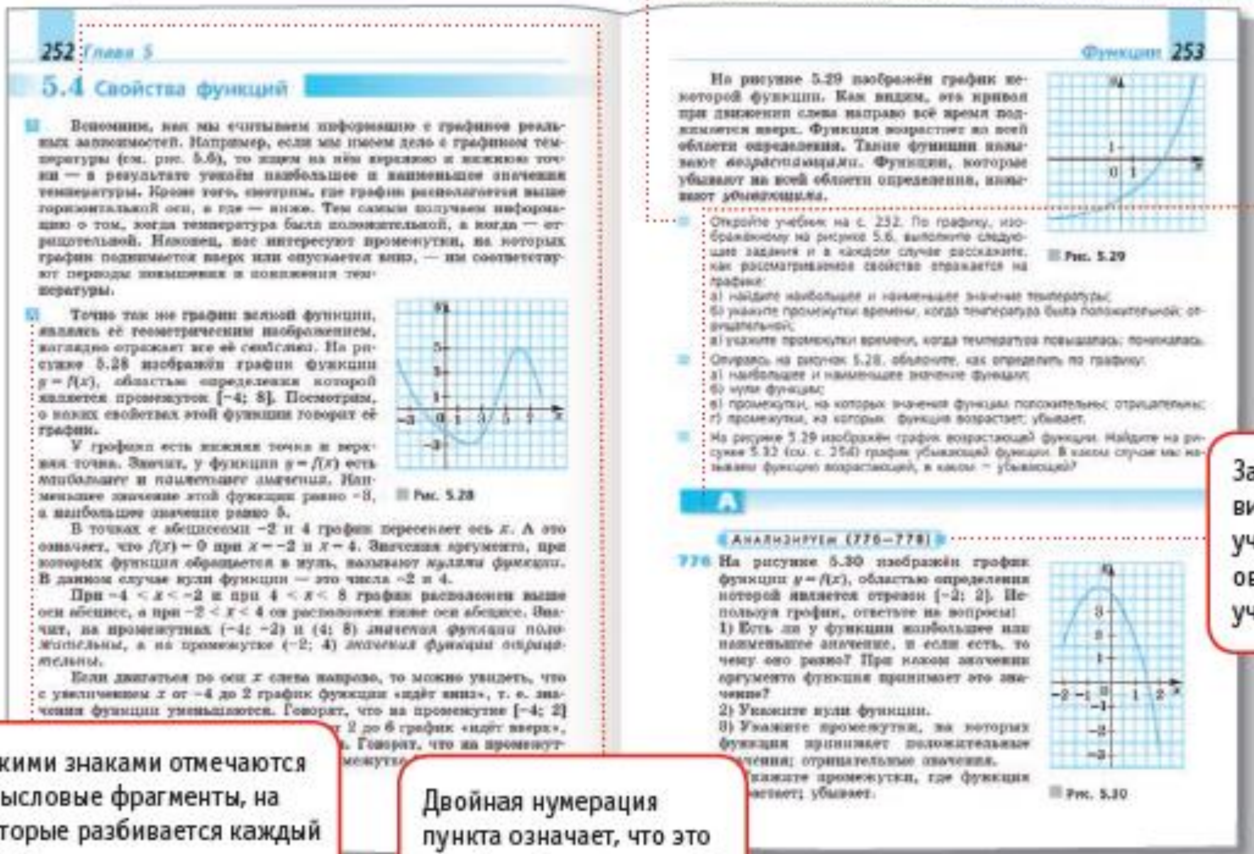
Возьмём дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{13}$ и выясним, какая из них больше. Для этого приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 13}{7\cdot 13},\qquad \frac{9}{13}=\frac{9\cdot 7}{13\cdot 7}.$$

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Таким образом, задача свелась к сравнению произведений $5\cdot 13$ и $9\cdot 7$. Так как $5\cdot 13=65$, а $9\cdot 7=63$, то $5\cdot 13>9\cdot 7$. Значит, $\frac{5}{7}>\frac{9}{13}$.

Решим теперь эту же задачу в общем виде, прибегнув к буквенной записи. Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — натуральные числа. Приведём их к общему знаменателю: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Разворот учебника для 8 класса



Так отмечаются вопросы, позволяющие проверить, понято ли прочитанное выше

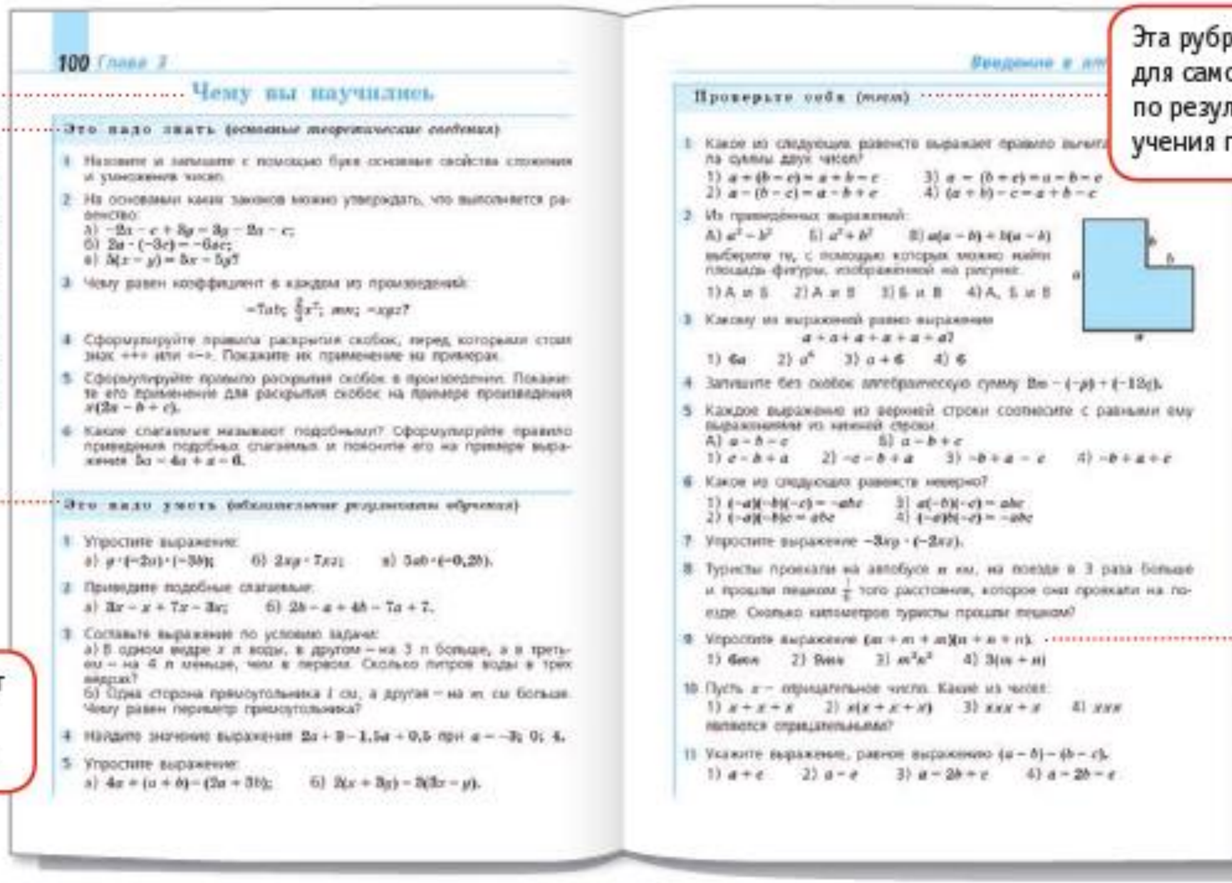
Задания первой группы сложности направлены на достижение базового уровня требований

Заголовок, указывающий на вид деятельности, позволяет учащимся активно и осознанно овладевать универсальными учебными действиями

Такими знаками отмечаются смысловые фрагменты, на которые разбивается каждый пункт

Двойная нумерация пункта означает, что это четвёртый пункт к пятой главе

Разворот учебника для 7 класса



Каждая глава завершается такой рубрикой, позволяющей ученику проверить себя на базовом уровне и оценить возможность выполнения более сложных заданий

Эта рубрика позволяет проверить знание основных теоретических сведений

Эта рубрика позволяет проверить основные результаты обучения

Эта рубрика – тест для самоконтроля по результатам изучения главы

Задание соответствует обязательным умениям

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Алгебра»

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Алгебра»

в) $1 - 4x^2 = 0$ $\qquad$ $1 - 4x^2 = 0$

. . . .

159. Решите уравнение:

а) $16x^2 - 3 = 0$ $\qquad$ в) $2x^2 - 24 = 0$

$x^2 = \dots$

$x = \pm \dots$

$x_1 = \dots, \; x_2 = \dots$

б) $\frac{x^2}{3} = \frac{x}{6}$ $\qquad$ г) $x - 1 = x^2 - 1$

$6 \cdot \frac{x^2}{3} = 6 \cdot \frac{x}{6}$

$2x^2 = \dots$

$2x^2 - \dots = 0$

$x(\dots) = 0$

$x = \dots$ или $x = \dots$

160. Не решая уравнение, определите, имеет ли оно корни. Если имеет, то найдите их сумму и произведение.

Уравнение	Дискриминант	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 10x + 9 = 0$			
$x^2 + 5x + 1 = 0$			
$x^2 - 6x - 15 = 0$			
$x^2 + 7x - 2 = 0$			

161. 1) Не решая уравнение, определите, являются ли корни уравнения числами одного или разных знаков.

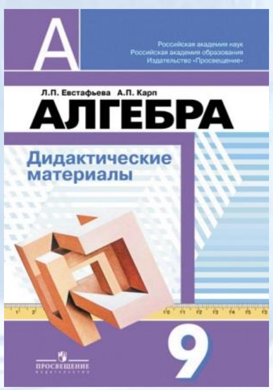
Корни одного знака	$x_1 \cdot x_2 = 4$	Уравнение	$x_1 \cdot x_2 = -1$	Корни разных знаков
		$x^2 - 5x + 4 = 0$		
		$x^2 + 9x - 1 = 0$		
		$x^2 + 15x - 7 = 0$		
		$x^2 + 3x + 2 = 0$		
		$x^2 - x - 4 = 0$		
		$x^2 - 8x + 6 = 0$		
		$x^2 - 20x + 19 = 0$		
		$x^2 - 2x - 14 = 0$		

2) Выпишите уравнения, имеющие корни разных знаков, в два столбца в зависимости от того, какой из корней больше по модулю — положительный или отрицательный.

Положительный корень больше по модулю	Отрицательный корень больше по модулю

Придумайте и запишите еще по одному уравнению в каждый столбец таблицы.

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Алгебра»



Б. $\sqrt{(2-\sqrt{10})^2} = \sqrt{10} - 2.$

В. $\sqrt{(2-\sqrt{10})^2} < 1.$

В А В А Б Б В Б

О-2. Общие свойства неравенств

Свойства равенства	Свойства неравенства
1. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$	1. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$
2. Если $a = b$, то $a + c = b + c$	2. Если $a < b$, то $a + c < b + c$
3. Если $a + b = c$, то $a = c - b$	3. Если $a + b > c$, то $a > c - b$
4. Если $a = b$, то $ac = bc$	4. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$
5. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$	5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$
6. Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$	6. Если $a < b$ и $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$

1. Проверьте, верно ли каждое из неравенств:

1) а) $\frac{2}{7} < \frac{5}{14}$; в) $\frac{3}{17} > 0{,}17$;

б) $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$; г) $-\frac{2}{5} < -0{,}36$;

2) а) $(-1)^2 > -\frac{1}{4}$; в) $2^2 + 3^2 < 5^2$;

б) $-1^2 < -\frac{1}{4}$; г) $\sqrt{5^2 - 3^2} > 2.$

Раздел III. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

М-1. Делимость и остатки

Как вы знаете, если два целых числа a и b имеют общий делитель d (пишут: $a \vdots d$, $b \vdots d$)[1], то он будет делителем и чисел $a + b$, $a - b$, ka, mb, $ka + mb$ (k и m — целые числа).

Пример 1. Докажите, что если $2a + b \vdots 4$, то $14a - 21b \vdots 4$ (a и b — целые числа).

Решение. Заметим, что $14a - 21b = 7(2a - 3b) = 7(2a + b - 4b)$. Но так как $2a + b \vdots 4$, то поскольку и $4b \vdots 4$, то $2a - 3b \vdots 4$, а тем самым и $7(2a - b) \vdots 4$.

Заметим, что совсем легко получить и более сильное утверждение: $14a - 21b \vdots 28$. В самом деле, $2a - 3b \vdots 4$, но числа 7 и 4 не имеют общих делителей, кроме единицы (взаимно просты), поэтому произведение $7(2a - 3b) \vdots 28$.

Если $a \vdots d$ и $a \vdots c$, причем c и d взаимно просты, то $a \vdots cd$.

Часто при решении задач на делимость чисел приходится перебирать их остатки от деления на какие-то другие числа. Например, остаток числа 17 от деления на 6 — число 5, а остаток числа 28 от деления на 6 — число 4. Вообще остаток от деления на 6 может быть равен лишь 0, 1, 2, 3, 4, 5. От деления, скажем, на 57 может быть лишь 57 остатков (0, 1, 2, 3, ..., 55, 56). Их конечное число, и потому их можно все перебрать!

Пример 2. Докажите, что $x(7x + 2)(5x + 2) \vdots 3$ при любом целом x.

Решение. Число x от деления на 3 может иметь остатки 0, 1 и 2, т. е. число x можно записать одним из следующих способов: $x = 3k$, $x = 3k + 1$, $x = 3k + 2$ при каком-то целом k. Но в первом случае рассматриваемое выражение, очевидно, делится на 3, поскольку один из его множителей делится на 3. Во втором случае $7x + 2 = 21k + 9 \vdots 3$ и, следовательно, все произведение кратно 3. Наконец, в третьем случае $5x + 2 = 15k + 12 \vdots 3$, а потому $x(7x + 2)(5x + 2) \vdots 3$.

[1] Знак $\vdots$ означает «делится нацело».

ФГОС

Методический шлейф к УМК Г.В. Дорофеева «Алгебра»

Решение уравнений и задач

Вариант 4

...кое из перечисленных уравнений можно преобра-...ть уравнение $\frac{x+5}{3}+\frac{x}{2}=4-x$, если избавиться от ...ей?

...$x+5)+2x=4-x$
...$x+5)+3x=4-x$
...$x+5)+3x=6\cdot 4-x$
4) $2(x+5)+3x=6(4-x)$

...ите уравнение $3-\frac{x+1}{3}=\frac{x}{5}$.

...т: ____________

...ите уравнение $0{,}045x-0{,}45=0{,}06(x-10)$.

...т: ____________

...итайте задачу: «Андрей купил акции двух компа-...на 6000 р. Через год стоимость акций первой ком-...и выросла на 8%, а второй — на 4%, в результа-...его доход Андрея составил 400 р. Сколько рублей ...атил Андрей на акции первой компании и сколь-...а акции второй?»

...е уравнение соответствует условию задачи, если ...уквой x обозначена сумма, потраченная на акции вто-... компании?

...$0{,}04x+0{,}08(6000-x)=400$
...$x+8(6000-x)=400$
...$0{,}04x+0{,}08(400-x)=6000$
...$0{,}08x+0{,}04(6000-x)=400$

...ите задачу.

...пункта A в пункт B выехал автобус со скоростью ...км/ч. Через час навстречу ему из пункта B в пункт A ...хал автомобиль со скоростью 90 км/ч, который ...ретил автобус в середине пути. Определите расстоя-... между пунктами A и B.

...ет: ____________

Дополнительная часть

8. Докажите, что если $a^2+b^2+c^2=0$, то
$$a(bc-a)+b(ac-b)+c(ab-c)=3abc.$$
9. Выполните возведение в квадрат $(2x^2+x-1)^2$.
10. Найдите значение выражения a^2+b^2, если $a+b=7$, $ab=12$.

Зачет № 8. Составление и решение уравнений

Оценка	«Зачет»	«4»	«5»
Обязательная часть	4 задания	4 задания	5 заданий
Дополнительная часть	—	1 задание	2 задания

Вариант 1

Обязательная часть

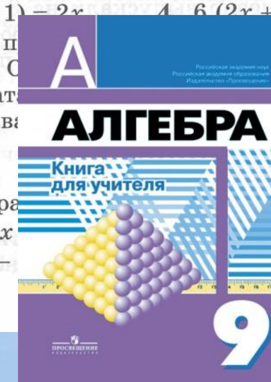
1. Прочитайте задачу:
«Лодка проплыла расстояние между пристанями вниз по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 5 ч. Собственная скорость лодки 10 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Сколько времени лодка плыла по течению реки?»
Составьте уравнение по условию задачи, обозначив через x время, которое лодка плыла по течению реки.
2. По условию предыдущей задачи составьте уравнение, обозначив через x расстояние до пристани.

Решите уравнение (3—4).

3. $7-3(x-1)=2x$ ...
5. Площадь ... квадрата. ... не квадрат... сторону ква...

Решите ура...

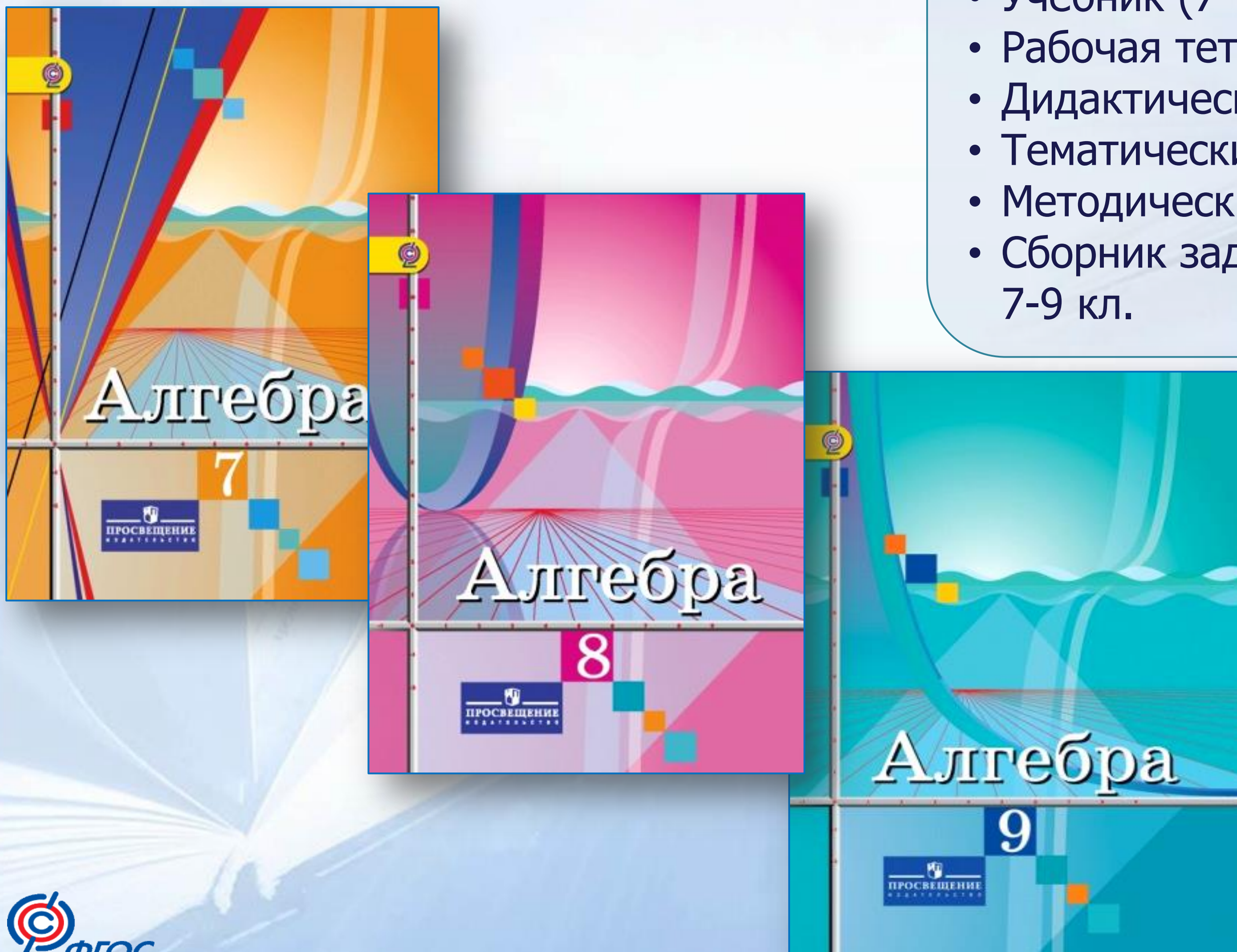
6. $(x+4)^2=x$...
7. $10-x(5-$...

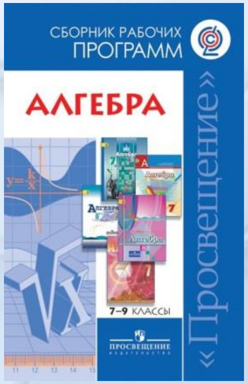


АЛГЕБРА

Ю.М. КОЛЯГИН И ДР.

- Рабочая программа
- Учебник (7-9)
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Методические рекомендации
- Сборник задач по алгебре для 7-9 кл.

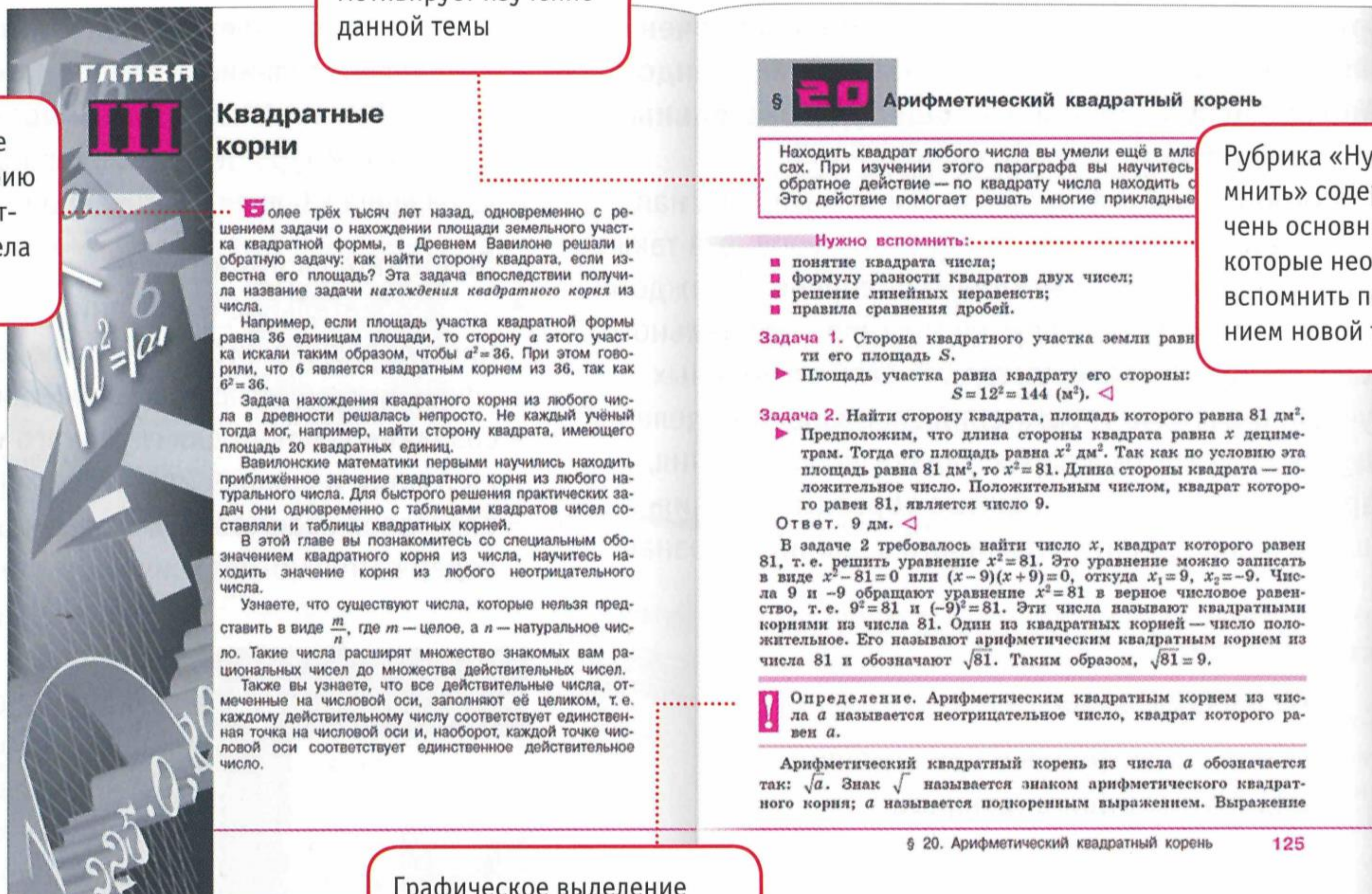




Введение к параграфу мотивирует изучение данной темы

Введение к главе описывает историю развития соответствующего раздела математики

Рубрика «Нужно вспомнить» содержит перечень основных понятий, которые необходимо вспомнить перед изучением новой темы



ГЛАВА III

Квадратные корни

Более трёх тысяч лет назад, одновременно с решением задачи о нахождении площади земельного участка квадратной формы, в Древнем Вавилоне решали и обратную задачу: как найти сторону квадрата, если известна его площадь? Эта задача впоследствии получила название задачи *нахождения квадратного корня* из числа.

Например, если площадь участка квадратной формы равна 36 единицам площади, то сторону a этого участка искали таким образом, чтобы $a^2=36$. При этом говорили, что 6 является квадратным корнем из 36, так как $6^2=36$.

Задача нахождения квадратного корня из любого числа в древности решалась непросто. Не каждый учёный тогда мог, например, найти сторону квадрата, имеющего площадь 20 квадратных единиц.

Вавилонские математики первыми научились находить приближённое значение квадратного корня из любого натурального числа. Для быстрого решения практических задач они одновременно с таблицами квадратов чисел составляли и таблицы квадратных корней.

В этой главе вы познакомитесь со специальным обозначением квадратного корня из числа, научитесь находить значение корня из любого неотрицательного числа.

Узнаете, что существуют числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число. Такие числа расширят множество знакомых вам рациональных чисел до множества действительных чисел.

Также вы узнаете, что все действительные числа, отмеченные на числовой оси, заполняют её целиком, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число.

§ 20 Арифметический квадратный корень

Находить квадрат любого числа вы умели ещё в мла
сах. При изучении этого параграфа вы научитесь
обратное действие — по квадрату числа находить с
Это действие помогает решать многие прикладные

Нужно вспомнить:

- понятие квадрата числа;
- формулу разности квадратов двух чисел;
- решение линейных неравенств;
- правила сравнения дробей.

Задача 1. Сторона квадратного участка земли равн
ти его площадь S.

► Площадь участка равна квадрату его стороны:

$$S=12^2=144\ (\text{м}^2).\ \triangleleft$$

Задача 2. Найти сторону квадрата, площадь которого равна 81 дм².

► Предположим, что длина стороны квадрата равна x дециметрам. Тогда его площадь равна x^2 дм². Так как по условию эта площадь равна 81 дм², то $x^2=81$. Длина стороны квадрата — положительное число. Положительным числом, квадрат которого равен 81, является число 9.

Ответ. 9 дм. ◁

В задаче 2 требовалось найти число x, квадрат которого равен 81, т. е. решить уравнение $x^2=81$. Это уравнение можно записать в виде $x^2-81=0$ или $(x-9)(x+9)=0$, откуда $x_1=9$, $x_2=-9$. Числа 9 и −9 обращают уравнение $x^2=81$ в верное числовое равенство, т. е. $9^2=81$ и $(-9)^2=81$. Эти числа называют квадратными корнями из числа 81. Один из квадратных корней — число положительное. Его называют арифметическим квадратным корнем из числа 81 и обозначают $\sqrt{81}$. Таким образом, $\sqrt{81}=9$.

! **Определение.** Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначается так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называется знаком арифметического квадратного корня; a называется подкоренным выражением. Выражение

§ 20. Арифметический квадратный корень 125

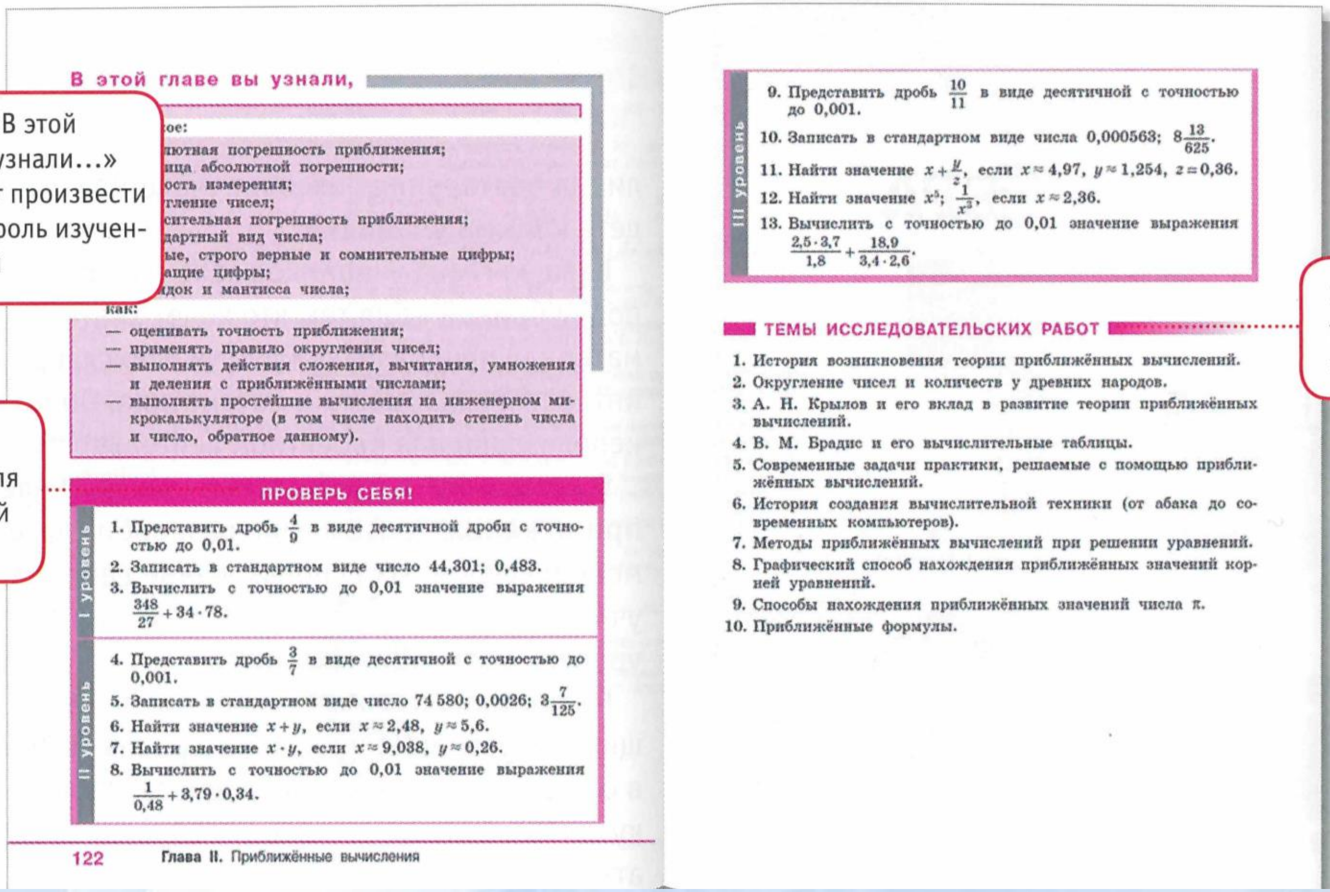
Графическое выделение понятий, которые надо знать наизусть

Развороты учебника для 8 класса

Рубрика «В этой главе вы узнали...» позволяет произвести самоконтроль изученной главы

Задания для самоконтроля трёх уровней сложности

Перечень тем исследовательских работ для внеклассной работы учащихся



В этой главе вы узнали,

...ое:

...ютная погрешность приближения;
...ица абсолютной погрешности;
...ость измерения;
...гление чисел;
...сительная погрешность приближения;
...дартный вид числа;
...ые, строго верные и сомнительные цифры;
...ащие цифры;
...док и мантисса числа;

как:

— оценивать точность приближения;
— применять правило округления чисел;
— выполнять действия сложения, вычитания, умножения и деления с приближёнными числами;
— выполнять простейшие вычисления на инженерном микрокалькуляторе (в том числе находить степень числа и число, обратное данному).

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Представить дробь $\frac{4}{9}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.
2. Записать в стандартном виде число 44,301; 0,483.
3. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{348}{27}+34\cdot 78$.

II уровень

4. Представить дробь $\frac{3}{7}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.
5. Записать в стандартном виде число 74 580; 0,0026; $3\frac{7}{125}$.
6. Найти значение $x+y$, если $x\approx 2{,}48$, $y\approx 5{,}6$.
7. Найти значение $x\cdot y$, если $x\approx 9{,}038$, $y\approx 0{,}26$.
8. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{1}{0{,}48}+3{,}79\cdot 0{,}34$.

122 Глава II. Приближённые вычисления

III уровень

9. Представить дробь $\frac{10}{11}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.
10. Записать в стандартном виде числа 0,000563; $8\frac{13}{625}$.
11. Найти значение $x+\frac{y}{z}$, если $x\approx 4{,}97$, $y\approx 1{,}254$, $z=0{,}36$.
12. Найти значение x^5; $\frac{1}{x^3}$, если $x\approx 2{,}36$.
13. Вычислить с точностью до 0,01 значение выражения $\frac{2{,}5\cdot 3{,}7}{1{,}8}+\frac{18{,}9}{3{,}4\cdot 2{,}6}$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История возникновения теории приближённых вычислений.
2. Округление чисел и количеств у древних народов.
3. А. Н. Крылов и его вклад в развитие теории приближённых вычислений.
4. В. М. Брадис и его вычислительные таблицы.
5. Современные задачи практики, решаемые с помощью приближённых вычислений.
6. История создания вычислительной техники (от абака до современных компьютеров).
7. Методы приближённых вычислений при решении уравнений.
8. Графический способ нахождения приближённых значений корней уравнений.
9. Способы нахождения приближённых значений числа π.
10. Приближённые формулы.

Особенности линии УМК «Алгебра 7-9 класс» Ю. М. Колягина и др.

Шаг вперёд

Фантастические разрезы и реальные расчёты

Предлагаю пофантазировать на актуальную тему. Недавно был изобретён сверхтонкий материал — *графен*. Кстати, один из его изобретателей К. С. Новосёлов — ученик М. И. Шабунина, одного из авторов этого учебника. Толщина графена равна диаметру атома углерода, т. е. 0,1 нм. Один нанометр (1 нм) равен 10^{-9} м. Допустим, имеется квадрат со стороной 1 дм графеновой плёнки. Её разрезают пополам, одну из половинок снова режут пополам и т. д. до тех пор, пока не получится квадрат со стороной, равной диаметру атома углерода. Как вы думаете, сколько нужно сделать таких разрезов?

Думаю, что очень много...

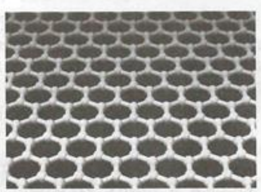
Давайте сделаем расчёт. Для этого нам понадобится знание свойств степени. После второго разреза получим квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ дм, после четвёртого — $\frac{1}{2^2}$ дм, после шестого — $\frac{1}{2^3}$ дм, после восьмого — $\frac{1}{2^4}$ дм и т. д., после $2n$-го разреза — $\frac{1}{2^n}$ дм.

Теперь выразим диаметр атома углерода через степень числа 2. Мы знаем, что $2^{10}=1024$. Будем считать, что $2^{10}\approx 1000=10^3$. Диаметр d атома углерода равен 10^{-10} м, т. е.

$$d=10^{-10}\text{ м}=\frac{1}{10^{10}}\text{ м}=\frac{10}{10^{10}}\text{ дм}=\frac{1}{10^9}\text{ дм}=$$

$$=\frac{1}{(10^3)^3}\text{ дм}\approx\frac{1}{(2^{10})^3}\text{ дм}=\frac{1}{2^{30}}\text{ дм}.$$

Попробую теперь сам определить искомое число разрезов. Итак, после $2n$-го разреза сторона листа графена, равная $\frac{1}{2^n}$ дм, должна быть примерно равна диаметру атома углерода, т. е. $\frac{1}{2^{30}}$ дм. Очевидно, что это произойдёт при $n=30$. То есть всего-то нужно сделать $2n=2\cdot 30=60$ разрезов.



Кристаллическая структура графена

Делимость и степени

Используя свойства степеней, можно, например, доказать, что число $2^{10}+5^{12}$ — составное.

Для этого мы должны представить эту сумму в виде произведения хотя бы двух множителей, отличных от 1.

Ты верно вспомнил понятие составного числа. Но для доказательства потребуется ещё знание формул квадрата суммы двух чисел и разности квадратов, а также того, что $a=a+b-b$.

● $2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+(5^6)^2=(2^5)^2+(5^6)^2+2\cdot2^5\cdot5^6-2\cdot2^5\cdot5^6=$
$=(2^5+5^6)^2-2^6\cdot5^6=(2^5+5^6-2^3\cdot5^3)(2^5+5^6+2^3\cdot5^3).$

Очевидно, что каждый множитель здесь больше 1. ○

А теперь попробуйте самостоятельно доказать, что сумма $5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010}$ делится на 6.

Я, кажется, знаю, как доказать. Нужно сгруппировать слагаемые попарно...

§ 2 Арифметический корень натуральной степени

С понятием арифметического квадратного корня из числа вы познакомились в 8 классе. Извлечение квадратного корня — операция, обратная возведению числа в квадрат. В этом параграфе вы познакомитесь с извлечением корня n-й степени — операцией, обратной возведению числа в n-ю степень.

Нужно вспомнить:

- понятия чётного и нечётного чисел;
- определение арифметического квадратного корня из числа;
- решение линейных неравенств;
- метод интервалов.

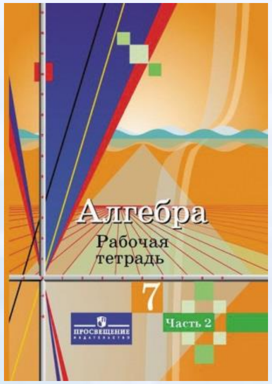
Задача 1. Решить уравнение $x^4=16$.

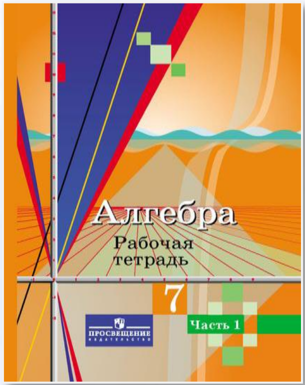
▶ Запишем уравнение в виде

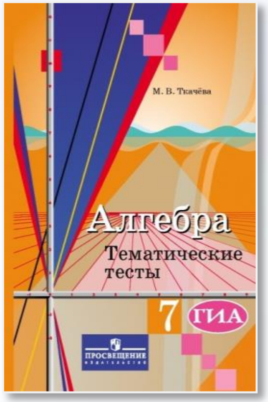
$$x^4-16=0 \text{ или } (x^2-4)(x^2+4)=0.$$

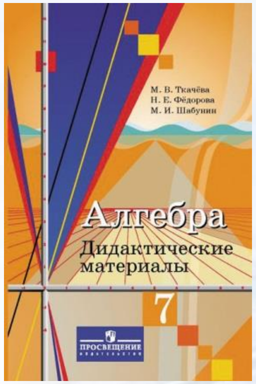
Так как $x^2+4\neq0$, то $x^2-4=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$. ◁

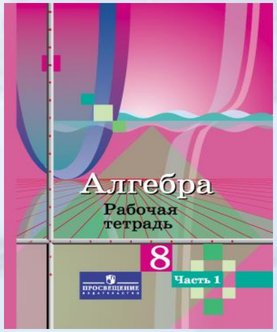
Методический шлейф к УМК Ю.М. Колягина «Алгебра»

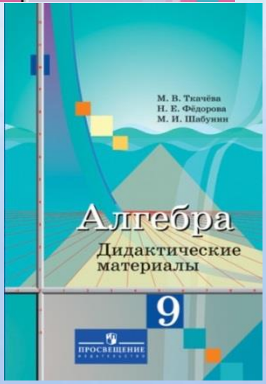










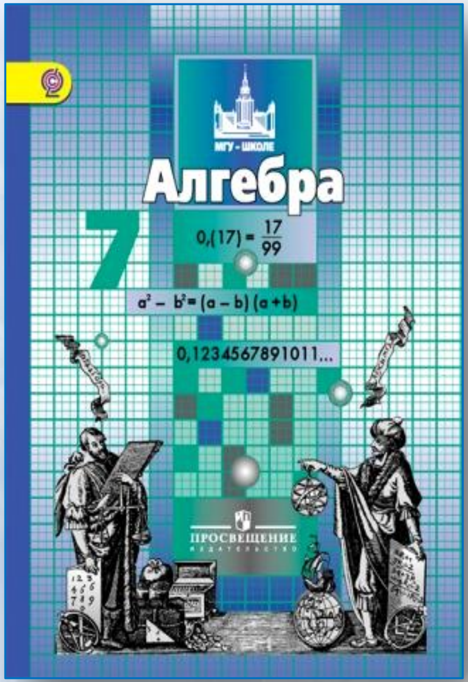


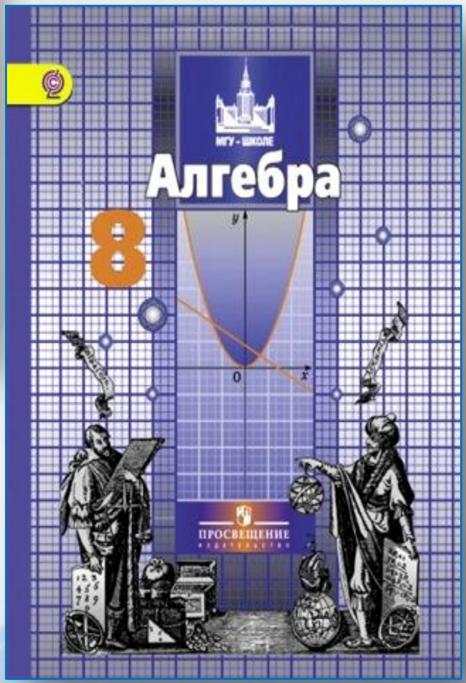
МГУ-школе

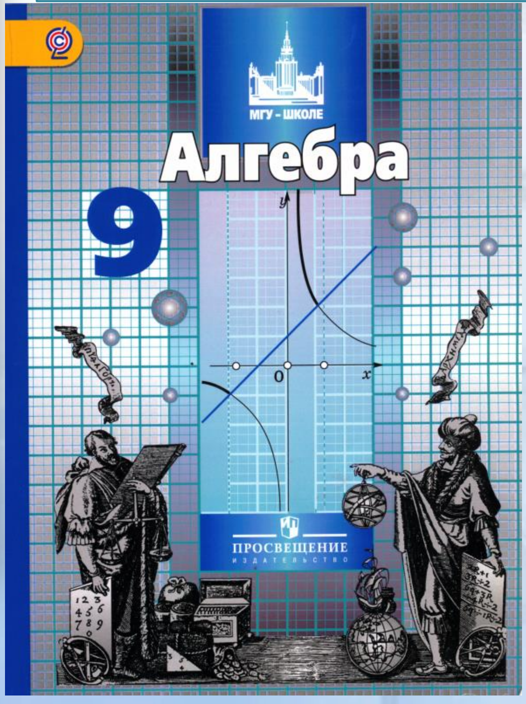
АЛГЕБРА

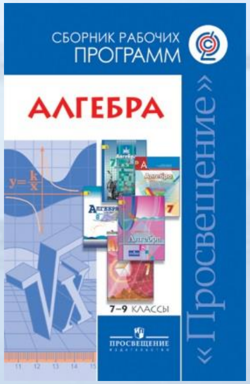
- **С.М. НИКОЛЬСКИЙ И ДР.**

- Рабочая программа
- Учебник (7-9 кл.)
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Книга для учителя









ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Оглавление

Дорогие семиклассники!

В этом году вы продолжите изучение математики по учебнику «Алгебра, 7». Слово АЛГЕБРА (аль-джабр) впервые применил в 825 г. среднеазиатский учёный ал-Хорезми в сочинении «Краткая книга об исчислении аль-джабра и аль-мукабалы», где это слово означало операцию переноса вычитаемых из одной части уравнения в другую или буквально «восполнение», «восстановление».

Алгебра, наряду с арифметикой и геометрией, принадлежит к числу старейших разделов математики. Задачи и методы алгебры, отличающие её от других разделов математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений.

Решение и исследование уравнений оказали большое влияние на развитие первоначального арифметического понятия числа. С введением в науку отрицательных, а затем иррациональных чисел общее исследование свойств этих числовых систем отошло к алгебре. При этом в алгебре сформировались характерные для неё буквенные обозначения, позволившие записать свойства действий над числами в сжатой форме. Преобразование буквенных выражений по определённым правилам дало возможность получать буквенную запись результата действий. Это и составляет аппарат алгебры. Тем самым алгебра, выйдя из арифметики и пользуясь буквенными обозначениями, изучает общие свойства числовых систем и общие методы решения задач при помощи уравнений.

Ещё 4 тысячи лет назад вавилонские учёные записывали уравнения в словесной форме. Первые обозначения неизвестных появились в Древней Греции благодаря учёному Диофанту.

В 1707 г. английский учёный И. Ньютон опубликовал книгу под названием «Универсальная арифметика» (или «Всеобщая арифметика»). В ней встречались обыкновенные арифметические задачи, которые И. Ньютон решал в общем виде — при помощи буквенных выражений. Тем самым он решал не одну задачу с конкретными данными, а целый класс однотипных задач, отличающихся только числовыми значениями величин.

Решение таких и более сложных задач потребовало развития буквенного счисления — правил действий над буквенными выражениями (одночленами, многочленами, алгебраическими дробями), обозначавшими первоначально числа.

Алгебра нужна в повседневной жизни, так как учит общим правилам действий над объектами, которые не обязательно являются числами.

Развороты учебника для 8 класса

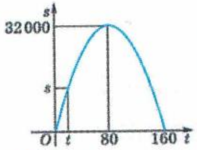


Рис. 98

Действительно, если бы силы земного притяжения не было, то пуля летела бы вверх равномерно с сообщённой ей скоростью и закон её движения был бы $s = 800t$. Но благодаря земному притяжению, действующему вниз, в правой части равенства (2) появляется второй член $\frac{gt^2}{2} \approx 5t^2$, взятый со знаком «минус». В реальной обстановке надо было бы учитывать ещё сопротивление воздуха.

Так как

$$800t - 5t^2 = -5(t^2 - 160t) = -5(t^2 - 2 \cdot 80t + 80^2) + 32\,000 = -5(t - 80)^2 + 32\,000,$$

то функцию (2) можно записать в виде

$$s = -5(t - 80)^2 + 32\,000.$$

Введём прямоугольную систему координат tOs (рис. 98).

В ней графиком движения пули является часть параболы, полученной параллельным переносом параболы $y = -5t^2$, при котором её вершина есть точка (80; 32000).

Из приведённого на рисунке 98 графика видно, что при возрастании t от 0 до 80 расстояние s пули до поверхности земли увеличивается от 0 до 32 000 м (32 км), затем на отрезке времени [80; 160] расстояние пули до земли уменьшается, и в момент времени $t = 160$ пуля снова достигает земли.

522. **Исследуем.** а) Выясните, с какой скоростью должна вылететь пуля из винтовки вверх, чтобы упасть на землю приблизительно через 2 мин.
б) Стрела, выпущенная из лука вертикально вверх, поднялась на 35 м. Через какое время она достигнет наибольшей высоты подъёма? Через какое время стрела упадёт на землю? Определите начальную скорость стрелы.

523. **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о вкладе в науку Архимеда.

Использование заданий на поиск информации способствует расширению кругозора, развитию мотивов познавательной деятельности учащихся

При изучении главы 4 вам предстоит освоить способы решения систем рациональных уравнений, научиться применять их к решению текстовых задач, освоить графический способ решения систем и уравнений. Умение решать системы уравнений потребуется вам и в старших классах.

Материалы «Дополнений к главам» могут послужить основой для начала исследовательской и проектной деятельности учащихся

§ 9. Системы рациональных уравнений

9.1. Понятие системы рациональных уравнений

Уравнение, обе части которого есть рациональные выра[…]ния относительно x и y, называют рациональным уравнени[…] с двумя неизвестными x и y.

Вот примеры рациональных уравнений с двумя неизвест[…]ми x и y:

$$2x + y - 4 = 0,$$
$$2x^2 - 3x + y - x + 1 = 0;$$
$$\frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{y}.$$

Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют решением уравнения с дву[…] неизвестными x и y, если эти числа удовлетворяют этому урав[…]нию, т. е. если при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y […] уравнение превращается в верное числовое равенство.

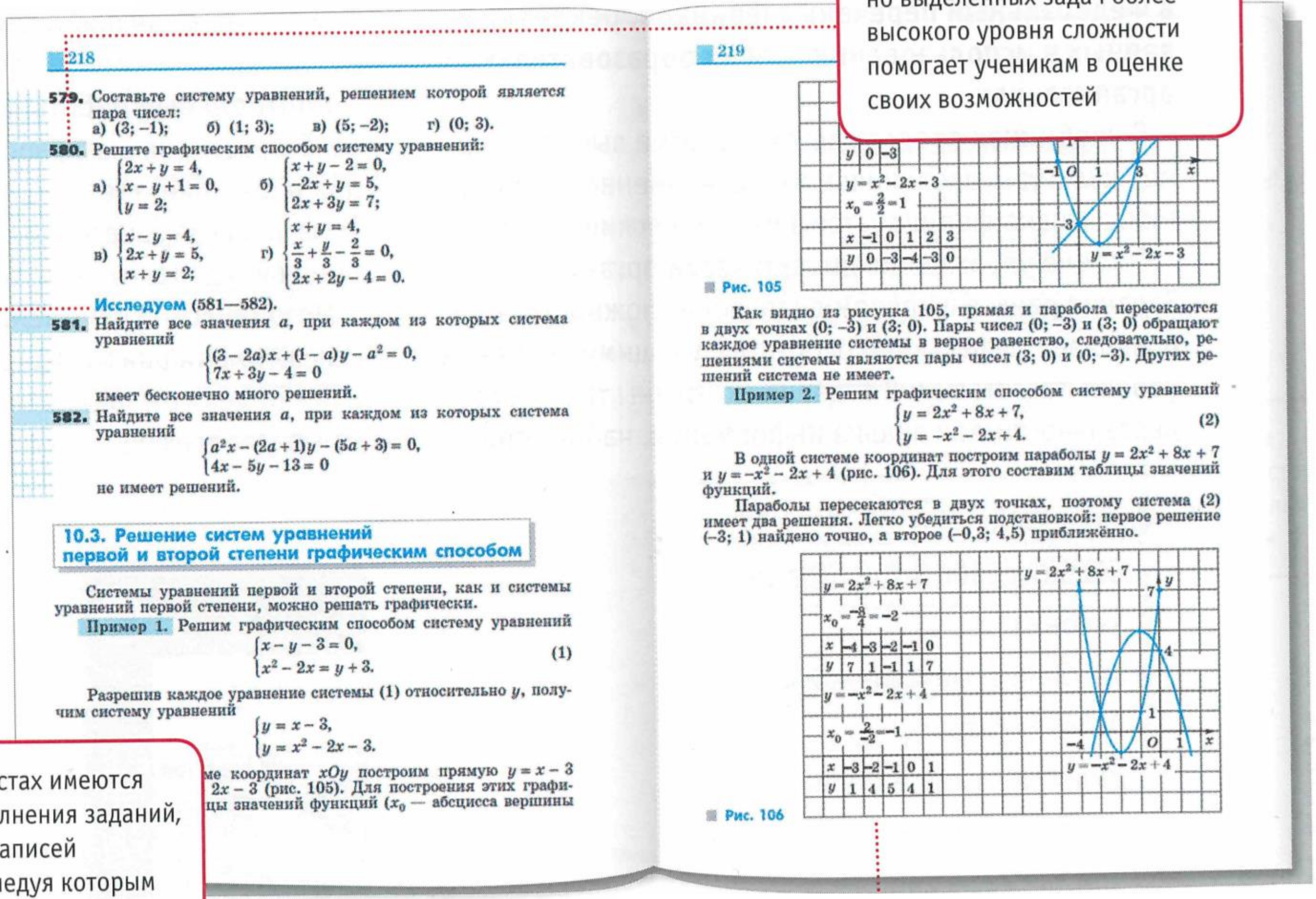
Например, пара чисел (2; 0) есть решение уравнения ([…] пара чисел (0; −1) есть решение уравнения (2), пара чисел (−1; 1) есть решение уравнения (3).

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x, y и z, называют рациональным уравнением с тремя неизвестными x, y и z.

Перед каждым параграфом имеется преамбула, задающая цель работы с новым материалом и определяющая его значимость при изучении других школьных предметов

Наличие в учебнике специально выделенных задач более высокого уровня сложности помогает ученикам в оценке своих возможностей

Выделение в задачном материале рубрики «Исследуем» предполагает учебно-исследовательскую и творческую деятельность учеников под руководством учителя



218

579. Составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел:
а) (3; –1); б) (1; 3); в) (5; –2); г) (0; 3).

580. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y + 1 = 0, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{3} = 0, \\ 2x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

Исследуем (581—582).

581. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (3 - 2a)x + (1 - a)y - a^2 = 0, \\ 7x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

582. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - (2a + 1)y - (5a + 3) = 0, \\ 4x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом

Системы уравнений первой и второй степени, как и системы уравнений первой степени, можно решать графически.

Пример 1. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x^2 - 2x = y + 3. \end{cases} \quad (1)$$

Разрешив каждое уравнение системы (1) относительно y, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

…ме координат xOy построим прямую $y = x - 3$ … $2x - 3$ (рис. 105). Для построения этих графи… …цы значений функций (x_0 — абсцисса вершины

219

x	–1	0	1	2	3
y	0	–3	–4	–3	0

Рис. 105

Как видно из рисунка 105, прямая и парабола пересекаются в двух точках (0; –3) и (3; 0). Пары чисел (0; –3) и (3; 0) обращают каждое уравнение системы в верное равенство, следовательно, решениями системы являются пары чисел (3; 0) и (0; –3). Других решений система не имеет.

Пример 2. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = -x^2 - 2x + 4. \end{cases} \quad (2)$$

В одной системе координат построим параболы $y = 2x^2 + 8x + 7$ и $y = -x^2 - 2x + 4$ (рис. 106). Для этого составим таблицы значений функций.

Параболы пересекаются в двух точках, поэтому система (2) имеет два решения. Легко убедиться подстановкой: первое решение (–3; 1) найдено точно, а второе (–0,3; 4,5) приближённо.

x	–4	–3	–2	–1	0
y	7	1	–1	1	7

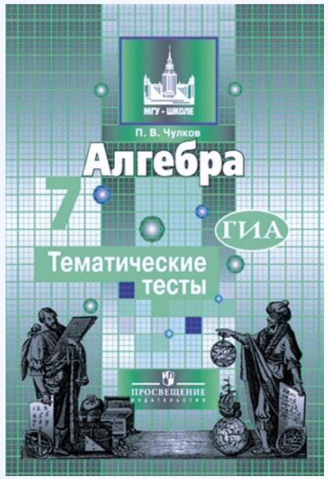
x	–3	–2	–1	0	1
y	1	4	5	4	1

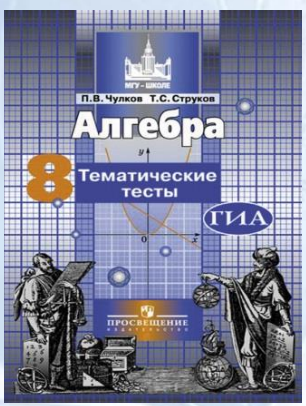
Рис. 106

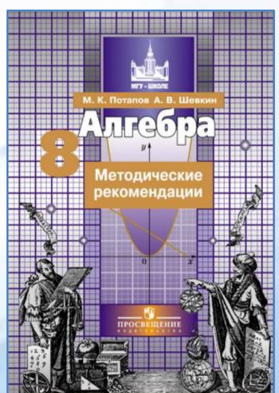
В учебных текстах имеются образцы выполнения заданий, оформления записей и чертежей, следуя которым учащиеся быстрее освоят изучаемые действия, соотнося их результаты с имеющимися образцами

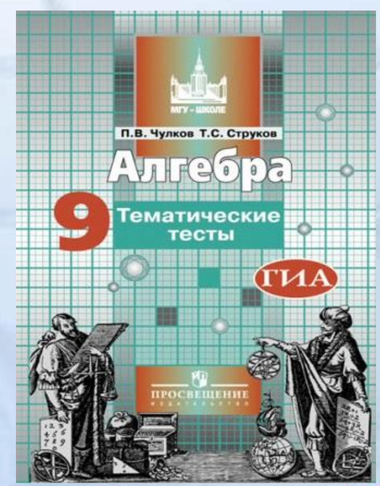
МГУ-школе

Методический шлейф к УМК С.М. Никольского «Алгебра»









ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

B1 Найдите сумму корней уравнений $0{,}5z + 4 = -1{,}5$ и $2{,}5 + 2z = 2$.

Ответ: ____________

B2 Сумма двух последовательных натуральных чисел равна 155. Найдите произведение этих чисел.

Ответ: ____________

B3 В коллекции было 27 трёхрублёвых и десятирублёвых монет на сумму 151 р. Сколько трёхрублёвых монет было в коллекции?

Ответ: ____________

B4 При каком значении p корень уравнения $-2x + p = -4$ равен 2?

Ответ: ____________

B5 Решите уравнение $\frac{m+2}{2} = \frac{m+3}{3} - 1$.

Ответ: ____________

B6 Найдите число t, если 50% от него равны 20% от числа $t + 33$.

Ответ: ____________

Тест 10. Системы линейных уравнений

Вариант 1

A1 Какая пара чисел является решением системы уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 5x + 3y = 2? \end{cases}$$

1) (3; −4) 2) (1; −1) 3) (−1; 2) 4) другой ответ

A2 Решением какой из данных систем уравнений является пара чисел (1; −1)?

1) $\begin{cases} 4x - 2y = 6, \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

A3 Какая из данных систем уравнений не имеет решений?

1) $\begin{cases} -2x + 3y = 10, \\ -2x + 5y = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 3y = -8, \\ -7x + 3y = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ -4x + 6y = 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ -2x + y = 9 \end{cases}$

A4 Какая из данных систем уравнений имеет бесконечно много решений?

1) $\begin{cases} x - 6y = 4, \\ -x + 6y = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x + 7y = 5, \\ 8x - 14y = -10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ -3x + y = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 2y = 14, \\ -2x - 6y = 9 \end{cases}$

A5 Какая из данных систем уравнений имеет единственное решение?

1) $\begin{cases} 2x + 12y = 8, \\ x + 6y = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ -2x - y = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 12y = 16, \\ -x + 6y = -8 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - y = 3, \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

С—25. Решение задач с помощью систем уравнений

I вариант

1. Три пирожка и две булки стоят 40 р., а два пирожка и три булки стоят 45 р. Сколько стоит пирожок, сколько стоит булка?
2. В классе 24 человека. Чтобы девочкам выдать по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 59 тетрадей. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

II вариант

1. Три ватрушки и пять плюшек стоят 45 р., а пять ватрушек и три плюшки стоят 43 р. Сколько стоит ватрушка, сколько стоит плюшка?
2. В классе 25 человек. Чтобы девочкам выдать по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 62 тетради. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

III вариант

1. Три марки и пять конвертов стоят 39 р., а четыре марки и два конверта стоят 24 р. Сколько стоит марка, сколько стоит конверт?
2. Токарь и его ученик за 3 ч обтачивают 75 деталей. Если токарь будет работать 2 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 70 деталей. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?

IV вариант

1. Пять открыток и четыре конверта стоят 44 р., а две открытки и три конверта стоят 26 р. Сколько стоит открытка, сколько стоит конверт?
2. Токарь и его ученик за 2 ч обтачивают 54 детали. Если токарь будет работать 3 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 92 детали. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?

С—26*. Системы трех линейных уравнений

I вариант

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-3y+2=1, \\ x+y+z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3y-z=2, \\ x+z=1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-3z=4, \\ y+5z=7, \\ -z=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-z=5, \\ x-y+z=5, \\ x-y-z=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+3y-z=2, \\ -2x+4y+2z=4, \\ 3x+y-5z=-6. \end{cases}$

II вариант

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

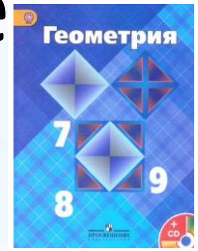
а) $\begin{cases} 2x+3y-z=4, \\ 3x-2y+2z=3, \\ x+y-z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=-1, \\ 3y+z=4, \\ x-z=1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ y+2z=8, \\ -z=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x-y-z=2, \\ x+y-z=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-3y+z=6, \\ 2x-y+3z=9, \\ -x+4y+5z=5. \end{cases}$

Основное общее образование. Геометрия 7-9 классы.



Линия УМК Л. С. Атанасян и др. 1.2.3.3.2.1

Линия УМК А. Д. Александрова и др. 7-9 классы 1.2.3.3.1.1-2-3

Линия УМК «МГУ – школе» В. Ф. Бутузова и др. Под редакцией В. А. Садовничего 7-9 классы 1.2.3.2.11.1-2-3

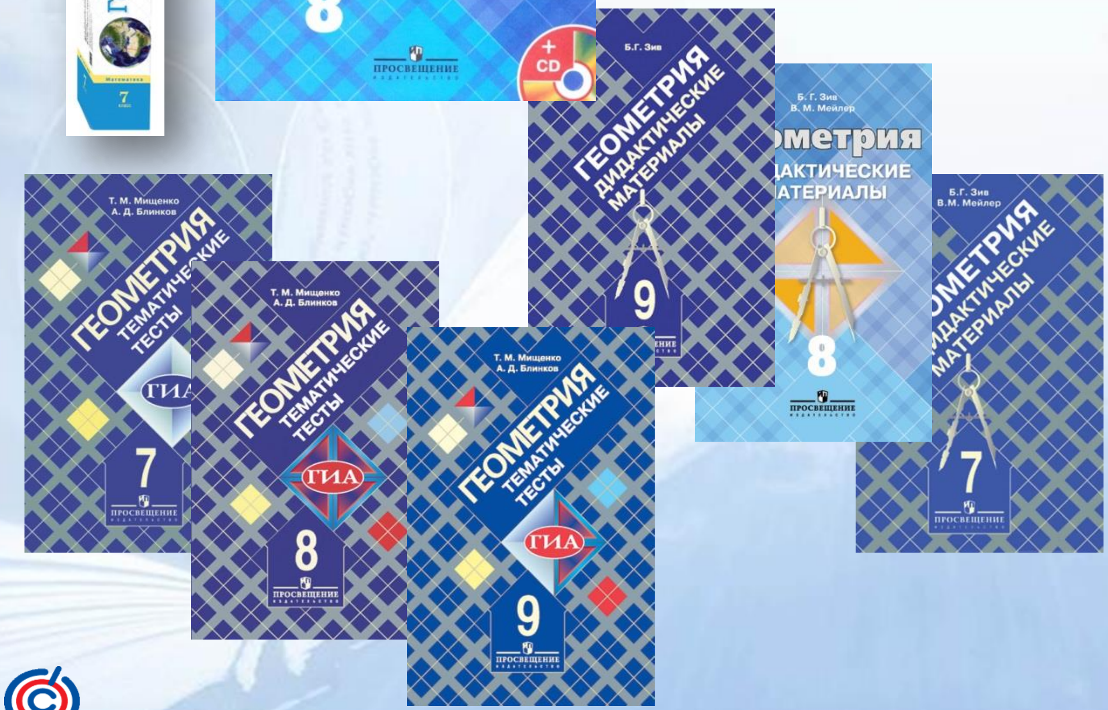
Линия УМК А. В. Погорелова 7-9 классы **1.2.3.3.6.1**

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГЕОМЕТРИЯ

- **Л.С. АТАНАСЯН И ДР.**

- Рабочая программа
- Учебник с электронным приложением
- Рабочая тетрадь
- Дидактические
- материалы
- Самостоятельные и контрольные работы
- Тематические тесты
- Книга для учителя



ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Особенности линии УМК Л. С. Атанасян «Геометрия 7-9»

Глава I

Начальные геометрические сведения

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Ещё мы расскажем о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводится измерение углов на местности.

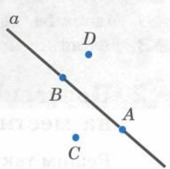
§1 Прямая и отрезок

1 Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

Рис. 4

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще,



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

11 Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

12 Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.

13 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

14 Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

15 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей:
а) соответственные углы равны;
б) сумма односторонних углов равна 180°.

16 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

17 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Дополнительные задачи

213 ☐ На рисунке 122 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

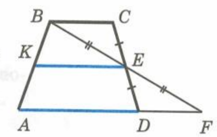


Рис. 122

214 ☐ Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

215 ☐ По данным рисунка 123 найдите угол 1.

216 ☐ На рисунке 124 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

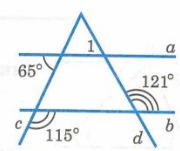


Рис. 123

217 ☐ Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

218 Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

219* ☐ Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

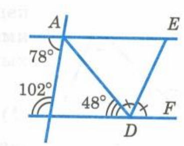


Рис. 124

Особенности линии УМК Л. С. Атанасян «Геометрия 7-9»

Исследовательские задачи

Предлагаемые задачи ориентированы на проведение исследований, связанных как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач.

7 класс

1 Сформулируйте новые признаки равенства треугольников, используя не только стороны и углы, но также медианы, биссектрисы и высоты треугольников. Примеры таких признаков дают задачи **161, 176, 329.**
Эта задача может быть поставлена перед группой учащихся: создать банк признаков равенства треугольников; может использоваться как предмет интеллектуального соревнования между двумя или несколькими группами учащихся.

2 Сформулируйте признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

4 Для каждого из новых признаков равенства треугольников рассмотрите задачу на построение: построить с помощью циркуля и линейки треугольник по тем элементам, которые фигурируют в признаке.

8 класс

1 Задача **813** и её обобщение на случай невыпуклого четырёхугольника. (Предложите способ решения, применимый для любого четырёхугольника.)

2 Теорема Птолемея и ряд задач, решаемых с её помощью (задачи **852, 889, 893, 1286**). Предложите свои задачи на применение этой теоремы.

3 Окружность Эйлера (задача **895**). Дополнительно исследуйте, сколько точек, указанных в задаче **895**, могут быть различными.

4 Прямая Симсона (задача **896**). Исследуйте все возможные случаи.

5 Прямая Эйлера: докажите, что в любом неравностороннем треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений), центр описанной около треугольника окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой. Установите, в каком отношении эти точки разделяют отрезок с концами в крайних точках.

9 класс

1 Проведите полное исследование задачи на построение треугольника ABC по углу A и сторонам AB и BC. При каких условиях задача:
а) имеет решение;
б) имеет единственное решение;
в) имеет не единственное решение (и сколько решений);
г) не имеет решений?

2 Окружности Аполлония и их свойства (задачи **981, 1286**).

3 Использование движений в задачах на доказательство (задачи **1178—1180, 1291—1296**).

4 Использование движений в задачах на построение (задачи **1181—1183, 1297—1303**).

Темы рефератов

1 Характеристическое свойство фигуры. Характеристические свойства прямоугольника, ромба, квадрата, окружности.

2 Формулы площадей различных четырёхугольников.

3 Многоугольники на решётке. Формула Пика.

4 Изопериметрические задачи.

5 Теоремы Чевы и Менелая.

6 Прямая и окружность Эйлера.

7 Различные средние для нескольких отрезков.

8 Методы решения задач на построение (метод подобия, метод геометрических мест точек, использование движений).

9 Радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей.

10 Вневписанные окружности.

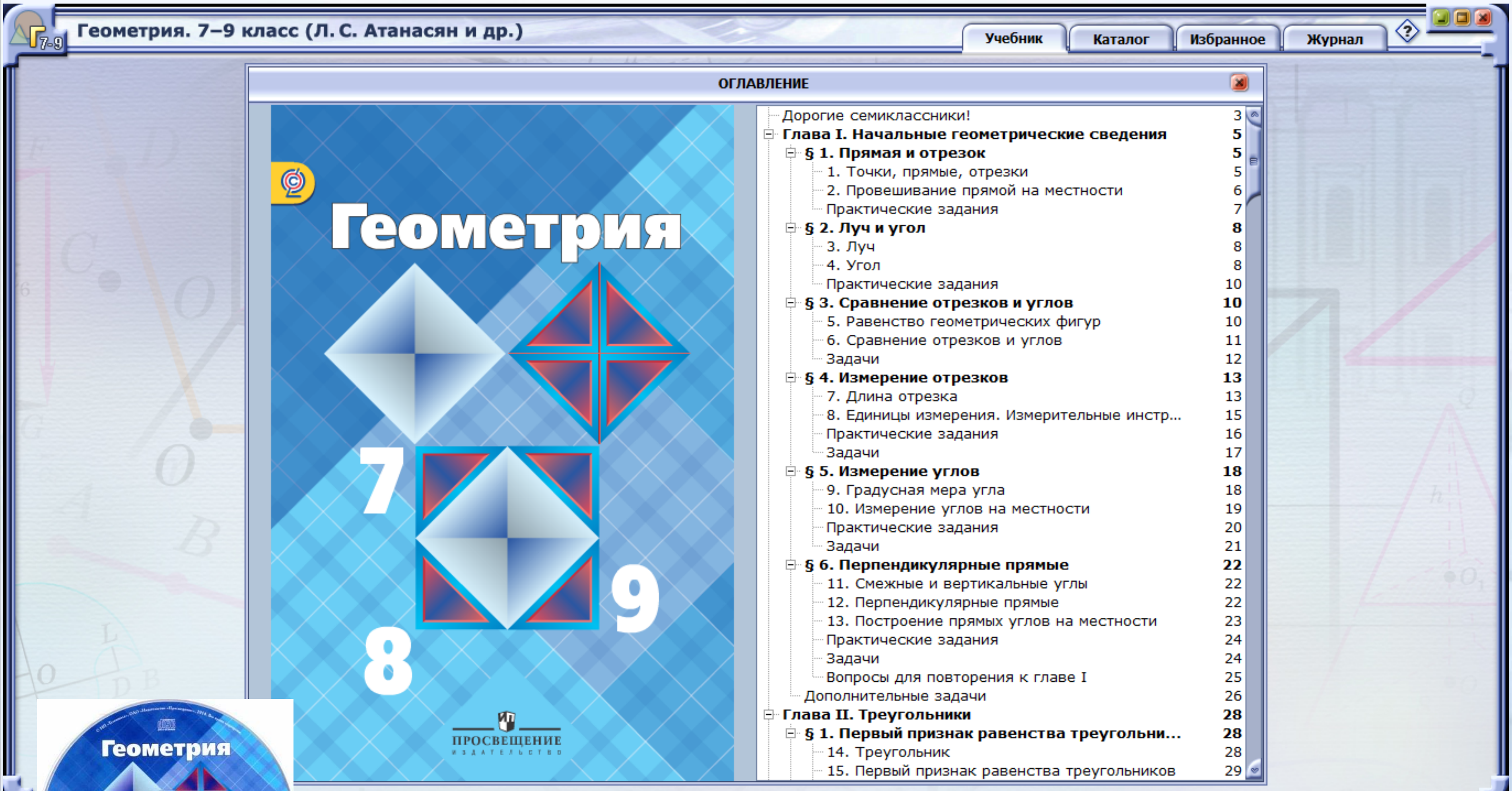
11 Теорема Морли.

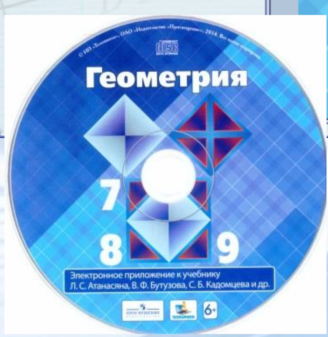
12 Использование движений при решении задач.

13 Центральное подобие и его применения (теорема Наполеона, прямая и окружность Эйлера, прямая Симсона).

14 Инверсия и её применения (теорема Птолемея и обратная ей, формула Эйлера для квадрата расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника, теорема Фейербаха, задача Аполлония).

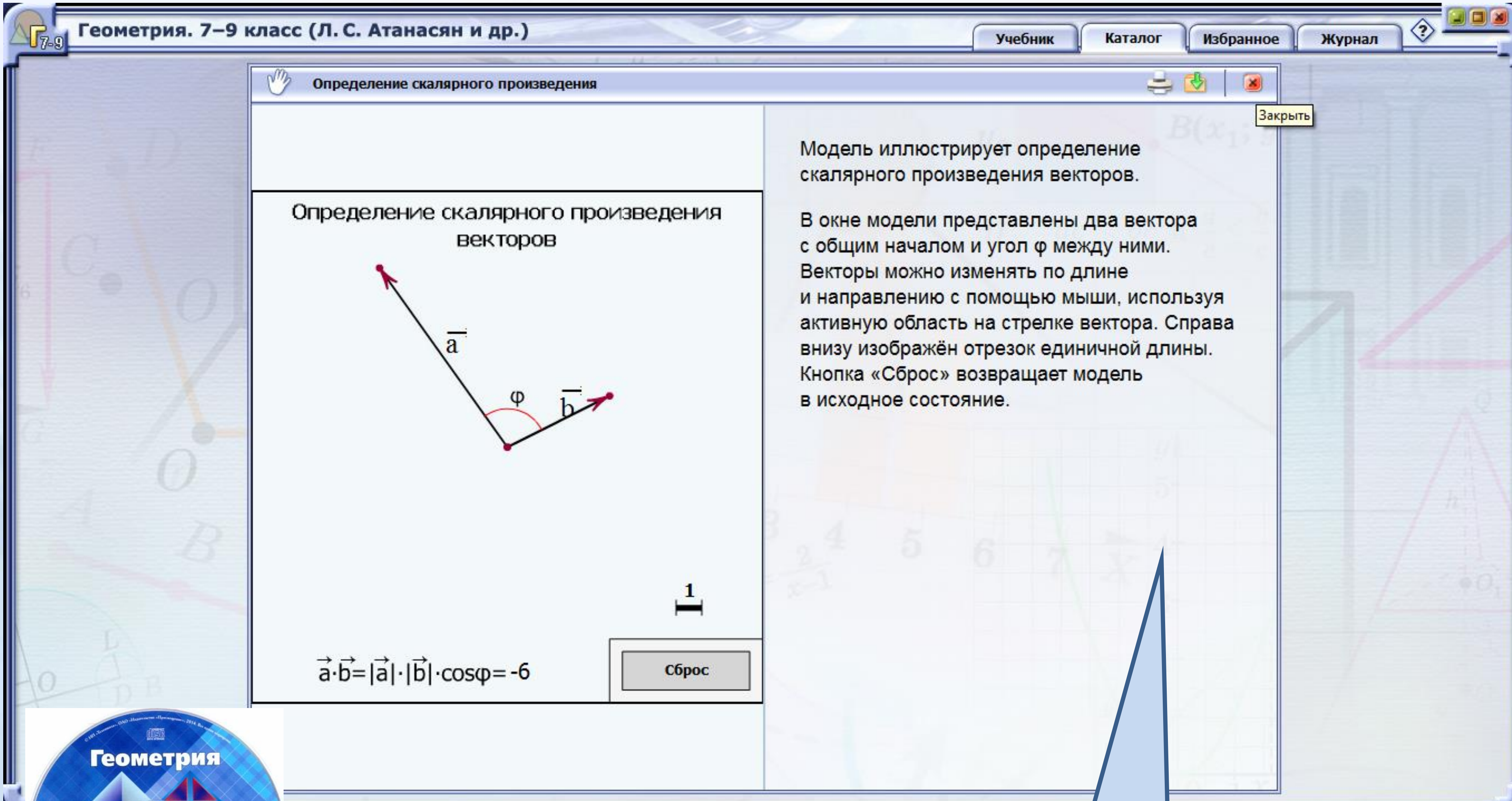
ЭЛЕКТРОННОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

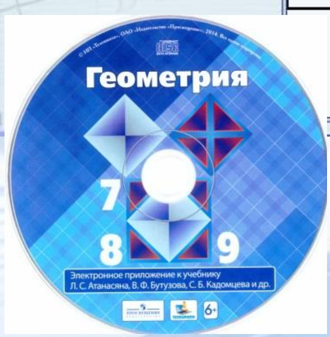




85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство

КАТАЛОГ ЭЛЕКТРОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ





Рубрика «Интерактивные модели»

ГЕОМЕТРИЯ 7-9

А.В. ПОГОРЕЛОВ

- Рабочая программа
- Рабочая тетрадь
- Дидактические
- материалы
- Поурочные разработки
- Тематические тесты
- Книга для учителя

ФГОС

85!
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» Погорелова А. В.

§ 1 Основные свойства простейших геометрических фигур

1 Геометрические фигуры

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие». Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.

Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность (рис. 1).

Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рисунке 2 фигура вверху состоит из треугольника и трёх квадратов, а фигура внизу состоит из окружности и частей окружности. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

Геометрия широко применяется на практике. Её надо знать и рабочему, и инженеру, и архитектору, и художнику. Одним словом, геометрию надо знать всем.

Геометрия, которая изучается в школе, называется евклидовой по имени Евклида, создавшего руководство по математике под названием «Начала». В течение длительного времени геометрию изучали по этой книге.

Мы начнём изучение геометрии с планиметрии. **Планиметрия** — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.

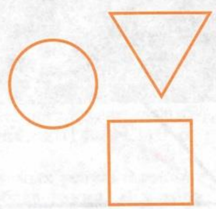


Рис. 1

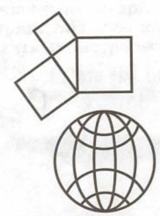


Рис. 2

2 Точка и прямая

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются **точка** и **прямая**. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, ... На рисунке 3 вы видите точку A и прямую a.

Евклид — древнегреческий учёный (III в. до н. э.)

Прямая бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть прямой, но представляем её себе неограниченно продолженной в обе стороны.

Посмотрите на рисунок 4. Вы видите прямые a, b и точки A, B, C. Точки A и C лежат на прямой a. Можно сказать также, что точки A и C принадлежат прямой a или что прямая a проходит через точки A и C.

Точка B лежит на прямой b. Она не лежит на прямой a. Точка C лежит и на прямой a, и на прямой b. Прямые a и b пересекаются в точке C. Точка C является точкой пересечения прямых a и b.

На рисунке 5 вы видите, как с помощью линейки строится прямая, проходящая через две заданные точки A и B.

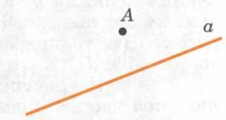


Рис. 3

Основными свойствами принадлежности точек и прямых на плоскости мы будем называть следующие свойства:

I **Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.**
Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 4 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC.

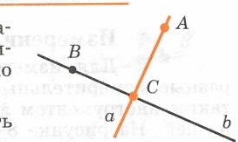


Рис. 4

Задача (3)[1]. Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.

Решение. Если бы две прямые имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две пря-

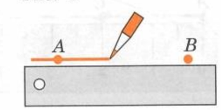


Рис. 5

[1] Число в скобках указывает номера задач, приведённых в конце параграфа.

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» Погорелова А. В.

42. Докажите, что в предыдущей задаче каждая сторона треугольника ABC видна из точки, в которой располагается комбинат, под углом $120°$.

Пункт 90

43. Докажите, что отрезки равной длины и углы с равной градусной мерой совмещаются движением.

44. У параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что параллелограммы равны, т. е. совмещаются движением.

45. Докажите, что ромбы равны, если у них равны диагонали.

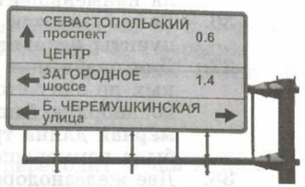
46. Докажите, что две окружности одинакового радиуса равны.

§ 10 Векторы

91 Абсолютная величина и направление вектора

Вектором мы будем называть направленный отрезок (рис. 213). **Направление вектора** определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a, b, c, ... Можно также обозначать вектор указанием его начала и конца. При этом начало вектора ставится на первом месте. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора иногда ставится стрелка или черта. Вектор на рисунке 213 можно обозначить так:

$\bar{a}$, $\vec{a}$ или $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$.



Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **одинаково направленными**, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **противоположно направленными**, если полупрямые AB и CD противоположно направлены. На рисунке 214 векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ противоположно направлены.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

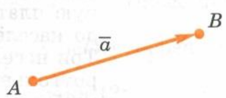


Рис. 213

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть **нулевым** вектором. Нулевой вектор обозначается нулём с чёрточкой ($\bar{0}$). О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю.

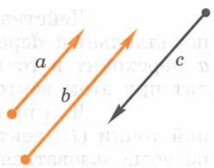


Рис. 214

92 Равенство векторов

Два вектора называются **равными**, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Из данного определения равенства векторов следует, что **равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.** Обратно: **если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.**

Действительно, пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине (рис. 215).

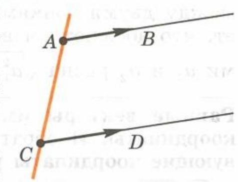


Рис. 215

Параллельный перенос, переводящий точку C в точку A, совмещает полупрямую CD с полупрямой AB, так как они одинаково направлены. А так как отрезки AB и CD равны, то при этом точка D совмещается с точкой B, т. е. параллельный перенос переводит вектор $\overline{CD}$ в вектор $\overline{AB}$. Значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, что и требовалось доказать.

Задача (2). Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Решение. Подвергнем вектор $\overline{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 216). При этом переносе точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC. Следовательно, точка B переходит в точку C. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{DC}$, а значит, эти векторы равны.

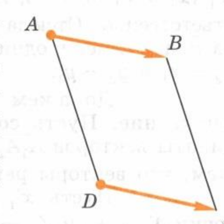


Рис. 216

Пусть $\bar{a}$ — вектор и A — произвольная точка. Тогда от точки A можно отложить один и только один вектор $\bar{a}'$, равный вектору $\bar{a}$.

ГЕОМЕТРИЯ 7-9

- **ПОД РЕД. В.А. САДОВНИЧЕГО**

МГУ-школе

- Рабочая программа
- Учебник (7-9 кл.)
- Рабочие тетради
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Поурочные разработки

ФГОС

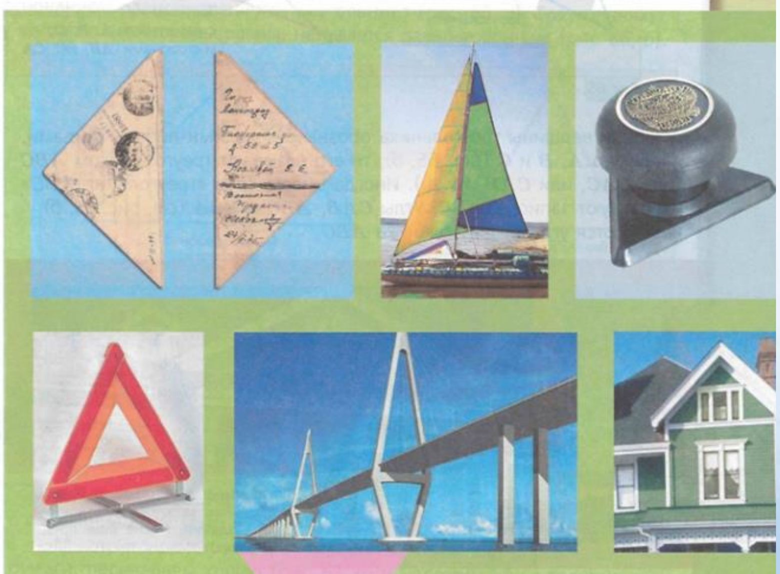
85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Линия УМК «МГУ –школе» ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под редакцией В. А. Садовничего

Глава 2

Треугольники

Что такое треугольник, вы знаете. В геометрии треугольник — одна из самых главных фигур. Оказывается, что такая простая на вид фигура таит в себе много интересных свойств. О некоторых свойствах треугольников вы узнаете в этой главе, а в следующих главах эти свойства будут использоваться при изучении других фигур и, кроме того, будут открыты новые свойства треугольников.



Введение

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию. Что это такое — геометрия? Для чего она нужна? Кратко можно сказать так: геометрия нужна для описания формы предметов, определения их размеров и взаимного расположения. Например, обложка книги и каждый её лист имеют форму прямоугольника (рис. 1, *а*). Крышка письменного стола также имеет форму прямоугольника. Посмотрите вокруг: перед вами очень много предметов, имеющих форму прямоугольника. Итак, для описания формы большого числа предметов используется слово «прямоугольник».

Рис. 1

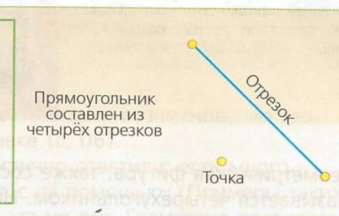


Рис. 2

Прямоугольник составлен из четырёх отрезков (рис. 1, *б*). Эти отрезки называются сторонами прямоугольника. Отрезок тоже геометрическая фигура (рис. 2). Концы отрезка — точки. Из точек состоит любая геометрическая фигура: отрезок, треугольник, окружность (рис. 3), прямоугольник и т. д.

Мы сказали, что прямоугольник составлен из четырёх отрезков. Но для описания прямоугольника этого мало. На рисунке 4 изображена

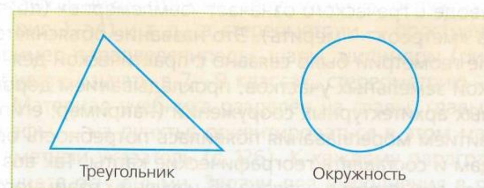


Рис. 3

Рис. 4

Линия УМК «МГУ –школе» ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под редакцией В. А. Садовничего

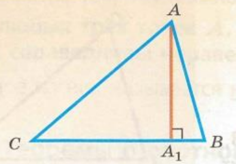


Рис. 117

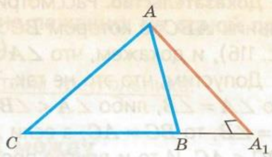


Рис. 118

В самом деле, если предположить, что точка A_1 лежит на продолжении стороны BC, например за точку B, то получится треугольник ABA_1 с прямым углом A_1 и тупым углом B (рис. 118), чего не может быть. Следовательно,

$$\angle A = \angle BAA_1 + \angle CAA_1.$$

Поскольку $\angle BAA_1 = 90° - \angle B$ и $\angle CAA_1 = 90° - \angle C$, то

$$\angle A = 90° - \angle B + 90° - \angle C,$$

откуда

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Теорема доказана.

<u>Внешним углом</u> треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь из углов этого треугольника.

Из теоремы о сумме углов треугольника следует что:

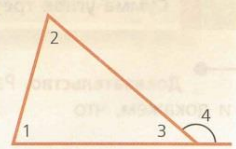
- **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.**

В самом деле, обратимся к рисунку 119, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника.

Угол 3 в сумме с углом 4 составляет 180°. Этот же угол 3 в сумме с углами 1 и 2 также составляет 180°. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2,$$

что и требовалось доказать.



$\angle 4$ — внешний угол треугольника
$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

Рис. 119

Вопросы и задачи

49. а) На стороне AB треугольника ABC, в котором $AC = 14$ см, $BC = 6$ см, отмечена точка M. Может ли отрезок AM быть равным 20 см?

б) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из этих сторон является основанием?

в) Точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD, причём $AC = BD$. Докажите, что $BC < AC + CD$.

г) РТ Докажите, что медиана AA_1 треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC.

д) Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне неравнобедренного треугольника пересекает бо́льшую из двух других сторон.

е) Докажите, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.

ж) РТ Докажите, что сумма медиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC больше полусуммы сторон AC и BC.

50. а) На стороне AB треугольника ABC, в котором $AC = 20$ см, отмечена такая точка M, что $CM = 16$ см. Может ли сторона AB быть равной 4 см?

б) Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны 5 см и 2 см.

в) Точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD, причём $AC = BC$. Докажите, что $BD < AC + CD$.

г) Докажите, что медиана AA_1 треугольника ABC больше полуразности сторон AB и AC.

д) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1 и C_1, отличные от вершин треугольника. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра треугольника ABC.

е) Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра.

ж) Точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD, а точки B и D — по разные стороны от прямой AC. Докажите, что $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$.

51. а) РТ Стороны треугольника ABC связаны неравенствами $AB > BC > AC$. Сравните углы этого треугольника и выясните, может ли угол A быть тупым.

б) РТ Углы треугольника ABC связаны неравенствами $\angle A > \angle B > \angle C$. Сравните стороны этого треугольника.

в) РТ Каждая из сторон AB и AD четырёхугольника $ABCD$ равна 7 см, $AC = 10$ см и $\angle BAC = \angle CAD$. Сравните углы ABC и ACD.

Линия УМК «МГУ –школе» ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под редакцией В. А. Садовничего

Замечание 2. Из теоремы о единственности перпендикуляра к прямой следует, что

две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, не пересекаются.

Предположим, что две прямые, перпендикулярные к прямой a, пересекаются в некоторой точке M. Точка M не может лежать на прямой a, так как в этом случае образуется развёрнутый угол, больший 180° (рис. 58, *а*). Если же точка M не лежит на прямой a (рис. 58, *б*), то из точки M будут проведены два перпендикуляра к прямой a, что невозможно. Таким образом, две прямые, перпендикулярные к прямой a, не пересекаются.

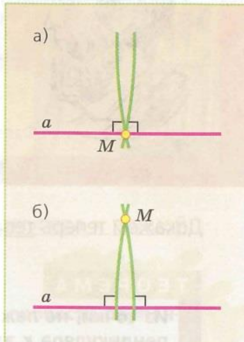


Рис. 58

Вопросы и задачи

13. а) Один из смежных углов на 60° меньше другого. Найдите эти углы.
б) Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла, один из которых в три раза больше половины другого. Найдите эти углы.
в) Исходя из рисунка 59, докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.
г) Три прямые пересекаются в одной точке и делят плоскость на шесть углов, два из которых равны 30° и 50°. Найдите остальные четыре угла.

14. а) Один из смежных углов в три раза больше другого. Найдите эти углы.
б) Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла, один из которых на 30° меньше половины другого. Найдите эти углы.
в) Исходя из рисунка 60, докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 7 = \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 8$.
г) Три прямые пересекаются в одной точке и делят плоскость на шесть углов. Один из этих шести углов в два раза больше другого и в три раза меньше третьего. Найдите остальные три угла.

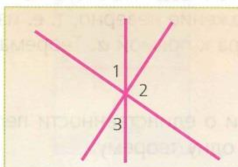


Рис. 59

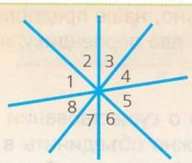


Рис. 60

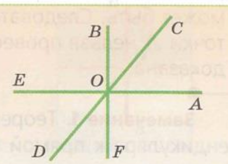


Рис. 61

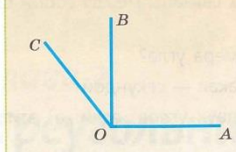


Рис. 62

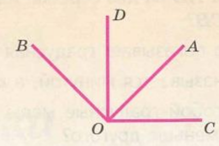


Рис. 63

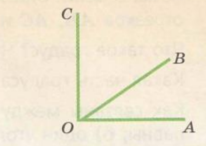


Рис. 64

15. а) На рисунке 61 прямые AE и BF взаимно перпендикулярны. Найдите углы BOC, EOD и AOD, если $\angle AOC = 50°$.
б) Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, изображённых на рисунке 62, равен 60°, а $\angle BOC = 30°$. Докажите, что $OA \perp OB$.
в) На рисунке 63 прямые OA и OB взаимно перпендикулярны и $\angle AOC = \angle BOD$. Докажите, что $OC \perp OD$.

16. а) На рисунке 61 прямые AE и BF взаимно перпендикулярны. Найдите углы DOF, BOC и AOC, если $\angle BOD = 140°$.
б) Угол, образованный биссектрисами углов AOB и AOC, изображённых на рисунке 64, равен 25°, а $\angle AOB = 40°$. Докажите, что $OA \perp OC$.
в) На рисунке 63 прямые OA и OB, а также прямые OC и OD взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\angle AOC = \angle BOD$.

Вопросы для повторения

1. Объясните, что такое отрезок и концы отрезка.
2. Сколько прямых проходит через две данные точки?
3. Сколько общих точек могут иметь две прямые? Что означают слова «две прямые пересекаются»? Как называется общая точка двух прямых?
4. Объясните, что такое луч и что такое полуплоскость.
5. Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла и что — сторонами угла?
6. Какой угол называется развёрнутым?
7. Что означают слова: «луч делит угол на два угла»?
8. Какие фигуры называются равными?
9. Объясните, как сравнить два отрезка и как сравнить два угла.
10. Какая точка называется серединой отрезка?
11. Какой луч называется биссектрисой угла?
12. Объясните, как производится измерение отрезков.
13. Как связаны между собой длины отрезков AB и CD, если: а) отрезки AB и CD равны; б) отрезок AB меньше отрезка CD?

Линия УМК «МГУ –школе» ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под редакцией В. А. Садовничего

Перпендикуляр — от латинского perpendicularis (отвесный).

Докажем теорему о существовании перпендикуляра к прямой.

ТЕОРЕМА

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой.

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (рис. 56, *а*). Докажем, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a. Мысленно перегнём плоскость по прямой a (рис. 56, *б*) так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. При этом точка A наложится на некоторую точку. Обозначим её буквой B. Разогнём плоскость и проведём через точки A и B прямую.

Пусть H — точка пересечения прямых AB и a (рис. 56, *в*). При повторном перегибании плоскости по прямой a точка H останется на месте. Поэтому луч HA наложится на луч HB, и, следовательно, угол 1 совместится с углом 2. Таким образом, $\angle 1 = \angle 2$. Так как углы 1 и 2 — смежные, то их сумма равна 180°, поэтому каждый из них — прямой. Следовательно, отрезок AH — перпендикуляр к прямой a. Теорема доказана.

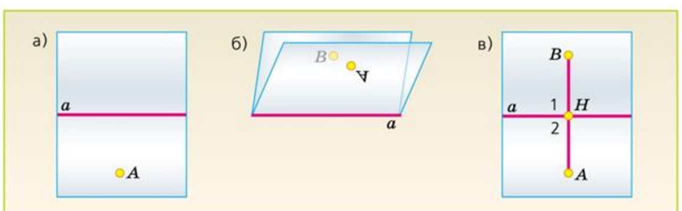
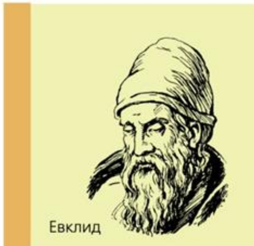
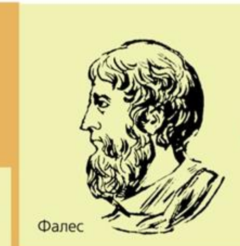


Рис. 56



Евклид

Теорема — греческое слово θεώρημα, означающее рассматриваю, обдумываю.



Фалес

Докажем теперь теорему о единственности перпендикуляра к прямой.

ТЕОРЕМА

Из точки, не лежащей на прямой, нельзя провести два перпендикуляра к этой прямой.

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (см. рис. 56, *а*). Докажем, что из точки A нельзя провести два перпендикуляра к прямой a. Предположим, что из точки A можно провести два перпендикуляра AH и AK к прямой a (рис. 57). Мысленно перегнём плоскость по прямой a так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. При перегибании точки H и K остаются на месте, точка A накладывается на некоторую точку. Обозначим её буквой B. При этом отрезки AH и AK накладываются на отрезки BH и BK.

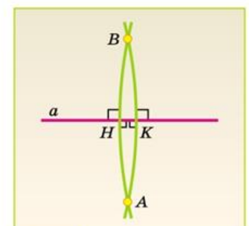


Рис. 57

Углы AHB и AKB — развёрнутые, так как каждый из них равен сумме двух прямых углов. Поэтому точки A, H и B лежат на одной прямой и также точки A, K и B лежат на одной прямой.

Таким образом, мы получили, что через точки A и B проходят две прямые AH и AK. Но этого не может быть. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, из точки A нельзя провести два перпендикуляра к прямой a. Теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы о существовании и о единственности перпендикуляра к прямой можно объединить в одну теорему:

- **из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.**

Методический шлейф к УМК под ред. В.А. Садовничего «Геометрия»

МГУ-школе

ФГОС

85! Просвещение издательство

Методический шлейф к УМК «МГУ –школе»

ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под ред. В.А. Садовничего

МГУ-школ

§ 2
Сравнение отрезков и углов

...о копирования на прозрачную бумагу выясните, какие фигуры ... равны фигуре Ф.

Ср...

A B C

Ре... ...яет часть отрезка ____, поэтому BC___AC.

От...

21

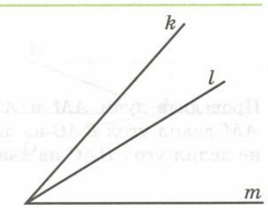
На рисунке отрезки AB и CD равны. Сравните отрезки AC и BD, наложив (мысленно) отрезок DB на луч AC так, чтобы точка D совместилась с точкой A.

A B C D

Ответ. AC ____ BD.

22

Сравните углы lm и km.

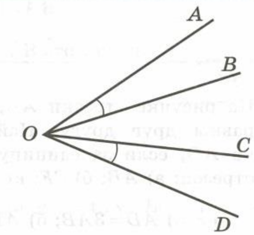


Решение. Угол lm составляет часть угла ______, поэтому $\angle lm$ ____ $\angle km$.

Ответ. $\angle lm$ ____ $\angle km$.

23

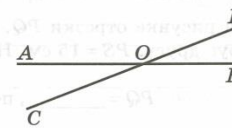
На рисунке углы AOB и COD равны. Сравните углы AOC и BOD, наложив (мысленно) угол BOD на угол AOC так, чтобы луч OD совместился с лучом OA, а лучи OB и OC оказались по одну сторону от прямой OA.



Ответ. $\angle AOC$ ___ $\angle BOD$.

24

Сравните углы: а) AOD и AOB; б) COD и AOB.



Решение. а) Неразвёрнутый угол AOD составляет часть развёрнутого угла _____, поэтому $\angle AOD$ ___ $\angle AOB$.

б) Любые два развёрнутых угла __________, поэтому $\angle COD$ ___ $\angle AOB$.

Ответ. а) ____________________. б) ____________________

25

На рисунке отрезки AB, BC, CD и DE равны друг другу. Назовите:

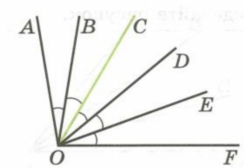
A B C D E

а) отрезок, серединой которого является точка B;
б) середину отрезка AE;
в) точку, являющуюся серединой двух отрезков.

Ответ. а) Отрезок _____; б) точка ___; в) точка ___

26

На рисунке углы AOB, BOC, COD, DOE и EOF равны друг другу. Назовите:



а) углы, биссектрисой которых является луч OC;
б) биссектрису угла DOF;
в) углы, равные углу COE.

Ответ. а) Углы _____ и _____; б) луч ______;

в) углы ________________________________

ФГОС

Методический шлейф к УМК «МГУ –школе»
ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под ред. В.А. Садовничего

МГУ-школе

Контрольные работы

ВАРИАНТ 1

...задана уравнением $2x - 3y - 6 = 0$. Найдите ...аты точек пересечения этой прямой с осями ко-...

... координаты точки, симметричной точке ...относительно точки $A(4; 2)$.

...сть касается осей координат, расстояние от ...кружности до начала координат равно $3\sqrt{2}$, ко-... центра окружности положительны. Напиши-...ение этой окружности.

...те вектор $\vec{n}\{4; 9\}$ по векторам $\vec{a}\{-1; 3\}$ и ...

ВАРИАНТ 2

1. Прямая задана уравнением $4x - 3y + 12 = 0$. Найдите координаты точек пересечения этой прямой с осями координат.
2. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(1; 1)$ относительно точки $A(-1; 2)$.
3. Окружность касается осей координат, расстояние от центра окружности до начала координат равно $4\sqrt{2}$, координаты центра окружности отрицательны. Напишите уравнение этой окружности.
4. Разложите вектор $\vec{n}\{1; 9\}$ по векторам $\vec{a}\{-1; 2\}$ и $\vec{b}\{5; 1\}$.

К-1

ВАРИАНТ 3

1. Напишите уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $5x + 2y - 10 = 0$ и проходящей через точку с координатами $(3; 0)$.
2. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки с координатами $(1; 5)$, $(5; 3)$ и $(-3; -3)$.
3. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Найдите $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC_1}$.
4. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них отмечена точка A, на другой — точка B так, что $\angle AKB = 90°$. Докажите, что $AB = 2R$.

21

Дополнительные задачи

Глава 7

1. Докажите, что сумма квадра... вольной точки плоскости д... вершин прямоугольника ра... стояний от этой точки до ди... угольника.
2. Найдите длину хорды, кото... $y = 3x$ окружность $(x + 1)^2 +$ ...
3. Даны точки $A(-3; 0)$, $B(1; 5)$... жите, что прямые AC и BD ...
4. Докажите, что если диагонал... взаимно перпендикулярны, т... тырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ у ... $= BC$, $C_1D_1 = CD$ и $D_1A_1 = DA$ ... ны.
5. Дано несколько точек, и для ... точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, при... ляется началом нескольких ... концом такого же количеств... сумма всех взятых векторов ...
6. Даны точки A, B, C и D, не л... Докажите, что $AB^2 + BC^2$ ... причём равенство имеет мест... да $ABCD$ — параллелограмм.
7. На стене висят двое правильн... казывают московское время, ... мальное расстояние между ко... равно m, а максимальное рав... между центрами этих часов.
8. Сколько осей симметрии мо... ник?
9. Докажите, что если фигура ... дикулярные оси симметрии, ... трии.

39

Самостоятельные работы

ВАРИАНТ 1

С-1

1. Точка M является серединой отрезка AB. Найдите координаты точки A, если $M(2; 1)$ и $B(5; 0)$.
2. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2; -3)$ и $B(3; 9)$.
3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\{1; 2\}$ и $\vec{b}\{3; -1\}$.

С-2

1. Лежат ли точки $A(-1; -1)$, $B(5; 1)$ и $C(-4; -2)$ на одной прямой?
2. Окружность с центром $A(2; 3)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение этой окружности.
3. Каково взаимное расположение прямой $3x - 4y + 25 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 25$?

С-3

1. Даны векторы $\vec{a}\{2; 3\}$ и $\vec{b}\{-1; 2\}$. Найдите координаты вектора $-3\vec{a} + 2\vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\{1; -3\}$ и $\vec{b}\{2; 1\}$. Найдите такое число x, что вектор $\vec{a} + x\vec{b}$ перпендикулярен к вектору $\vec{b}$.
3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $BK : KC = 3 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

5

ФГОС

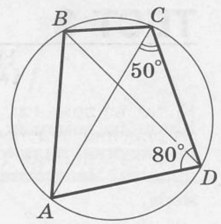
85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Методический шлейф к УМК «МГУ –школе»

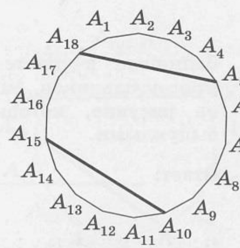
ГЕОМЕТРИЯ 7-9 В. Ф. Бутузова и др. под ред. В.А. Садовничего

МГУ-шк

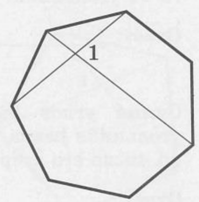
7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите угол CBD, если $\angle ADC = 80°$ и $\angle ACD = 50°$.



A_{18} и $A_{10}A_{15}$
ка.

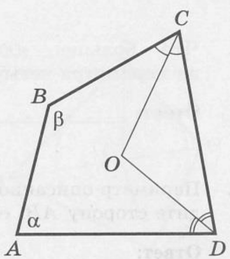


исунке изображены правильный угольник и две его диагонали. ите угол 1.



т:

олнительная задача.) Углы B выпуклого четырёхугольни- BCD равны α и β, биссектрисы углов C и D пересекаются в точке O. Найдите угол COD.



Ответ: ______________

ТЕСТ 3

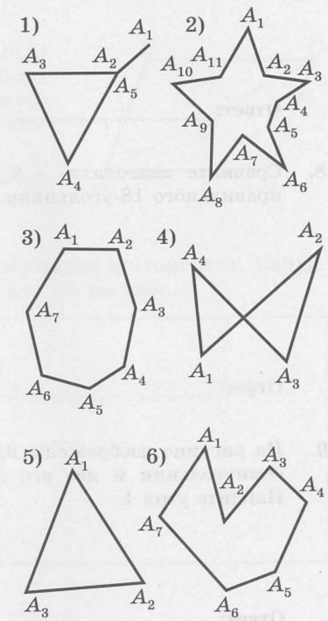
Вариант 4

1. Какие из ломаных, изображённых на рисунке, являются многоугольниками? Запишите в ответе их номера.

Ответ: ______________

2. Запишите в ответе номера тех многоугольников, изображённых на рисунке, которые являются выпуклыми.

Ответ: ______________



3. Чему равна сумма углов выпуклого 10-угольника?

Ответ: ______________

4. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 1080°. Чему равно число его сторон?

Ответ: ______________

5. Что больше: сумма длин диагоналей или сумма длин двух противоположных сторон четырёхугольника?

Ответ: ______________

6. Периметр описанного четырёхугольника $ABCD$ равен 14 см. Найдите сторону AB, если она на 3 см больше стороны CD.

Ответ: ______________

ФГОС

ГЕОМЕТРИЯ 7-9

- **АЛЕКСАНДРОВ А.Д.,**
- **ВЕРНЕР А.Л.,**
- **РЫЖИК В.И.**

- Рабочая программа
- Учебник
- Дидактические материалы
- Методические рекомендации

ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

В курсе три важнейшие линии

Построения геометрических фигур — ведущая линия в 7 классе.

Вычисление геометрических величин — ведущая линия в 8 классе.

Идеи и методы современной геометрии — ведущая линия в 9 класса.

Книги для учителя и дидактические материалы размещены на сайте издательства.

Авторы курса: **А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот**.

Серия «**Академический школьный учебник**»

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» А. Д. Александрова и др.

Введение

Что такое геометрия

1. Как возникла и что изучает геометрия

Имя древнегреческой богини Земли Геи звучит в названиях многих наук: *география*, *геология*, *геофизика* и др. Всё это науки о Земле. И слово *геометрия* в переводе с греческого означает *измерение Земли*, или *землемерие*. Значит, геометрия возникла в связи с измерением земельных участков. Когда же это произошло? Вот какими замечательными словами отвечал на этот вопрос ещё в IV в. до н. э. греческий учёный Евдем Родосский: «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении Земли. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путём чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

Из этих слов вы поняли, что геометрия очень древняя наука, но о том, чем она занимается, в них сказано мало. Поэтому обратимся к Математической энциклопедии. А в ней написано: «Геометрия — часть математики, первоначальным предметом которой являются пространственные отношения и формы тел. Геометрия изучает пространственные отношения и формы, отвлекаясь от прочих свойств реальных предметов (плотность, вес, цвет и т. д.)». Отвлекаясь, значит — не обращая внимания. Когда геометры изучают какой-нибудь реальный предмет (нечто существующее в природе или сотворённое человеком), то им неважно, из чего он сделан и какого он цвета. Им интересна его форма и как он устроен, какие имеет свойства, в частности размеры, площадь поверхности, объём, и как он расположен по отношению к другим реальным предметам.

Пифагор

Рис. 1

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» А. Д. Александрова и др.

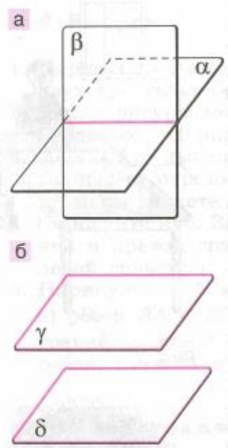


Рис. 10

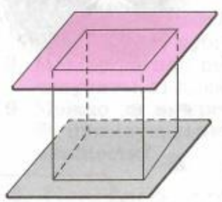


Рис. 11

пришли к понятию точки. Наглядное представление о точке можно получить, глядя на след от ножки циркуля на листе бумаги.

Точки обозначают большими латинскими буквами: *A*, *B*, *C*, ... **Прямые** обозначают малыми латинскими буквами: *a*, *b*, *c*, ...

Плоскости обозначают малыми греческими буквами: α (альфа), β (бета), γ (гамма), δ (дельта), ...

Как изображают различные плоскости, показано на рисунке 9, а, б. Можно рисовать и так, как на рисунке 9, а, и так, как на рисунке 9, б. На рисунке 10, а изображены **пересекающиеся плоскости** α и β. Так называют две плоскости, имеющие общие точки. **Пересечением двух плоскостей, имеющих общую точку, является прямая.**

На рисунке 10, б изображены две плоскости, которые не имеют общих точек: γ и δ. Такие плоскости называются **параллельными**.

Примерами пересекающихся и параллельных плоскостей служат плоскости граней прямоугольного параллелепипеда (рис. 11): плоскости его противоположных граней параллельны, а плоскости соседних граней пересекаются (по прямой, на которой лежит ребро прямоугольного параллелепипеда). Всё это вы можете увидеть в своей классной комнате.

5. Об истории геометрии. Значение геометрии

Как мы уже говорили, геометрия как практическая наука зародилась в Древнем Египте несколько тысяч лет тому назад. Первоначально она была набором правил, которые помогали измерять площади, объёмы, решать задачи, возникавшие при сооружении оросительных каналов, грандиозных храмов, пирамид и т. п. Особенно важной была задача распределения земельных участков.

В Египте плодородная земля тянется узкой полосой в долине Нила, а за её пределами простирается пустыня. Пригодной для земледелия земли было мало, и каждый её клочок представлял собой большую ценность. Поэтому, когда ежегодно разливы Нила смывали границы участков, нужно было их восстанавливать как можно точнее. Этим занимались специальные землемеры, которые и были, можно сказать, первыми геометрами. Известно, что в своих геометрических построениях египтяне пользовались верёвками. Например, они натягивали на колышки верёвку с двенадцатью узелками и строили та-

ким образом треугольник (рис. 12) со сторонами 3, 4, 5, в котором есть прямой угол. Этот треугольник до сих пор называют «египетским треугольником» (мы о нём уже говорили в п. 2).

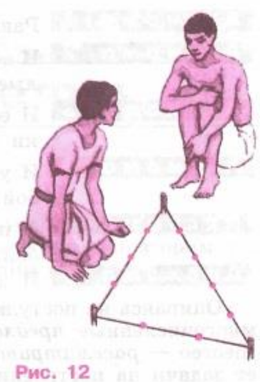


Рис. 12

Накопленные египтянами обширные знания о свойствах геометрических фигур заимствовали греки в период VII—V вв. до н.э. Они называли египетских геометров-землемеров «герпедонаптами», т. е. «верёвковязателями». В Древнем Египте геометрия была сугубо прикладной наукой, а в Древней Греции она стала математической теорией. Имена великих геометров Древней Греции: Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда и многих других — хорошо известны и в наши дни. Об одном из них — Евклиде мы расскажем уже сейчас.

Евклид работал в Александрии в III в. до н.э. Славу Евклиду создал его собирательный труд «Начала». В 13 книгах «Начал» изложены основы геометрии того времени, а также геометрическим языком и основы алгебры и теории чисел. Научные и педагогические достоинства «Начал» настолько велики, что это сочинение стало основным руководством по геометрии на две тысячи лет. Поэтому можно было бы назвать Евклида «величайшим школьным учителем, которого только знает история математики», как сказал уже в XX в. знаменитый алгебраист Ван-дер-Варден.

Важнейшее достоинство «Начал» в том, что в основу своих выводов Евклид положил **постулаты** и **аксиомы**. Слово *постулатум* — это латинский перевод греческого слова «требование». А греческое слово *аксиома* означает «предложение, достойное признания». И в самом деле, если и можно в чём-то сомневаться в геометрии, то только в постулатах. Все остальные её результаты получены чисто логическим путём, а потому не могут подвергаться сомнениям. Будущее показало, насколько была верна такая позиция Евклида.

Постулатов у Евклида пять. В первых трёх из них говорится о возможности простейших построений.

Постулат 1 От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

Постулат 2 И ограниченную прямую (т. е. отрезок) можно непрерывно продолжить по прямой.

Постулат 3 И из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

В четвёртом постулате говорится о равенстве прямых углов. О пятом постулате мы скажем позднее.

В аксиомах у Евклида речь идёт об общематематических положениях. Всего у Евклида девять аксиом. Приведём некоторые из них.

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» А. Д. Александрова и др.

8.17. Можете ли вы найти третий угол равнобедренного треугольника, в котором один из углов: а) 15°; б) 80°; в) 160°?

8.18. Сколько углов на рисунке 253 должно быть известно, чтобы можно было узнать величину остальных?

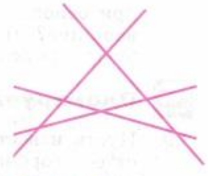


Рис. 253

Рассуждаем

8.19. Вася вычислял углы в треугольниках и получил такие ответы: а) 60°, 80°, 36°20′; б) 50°10′, 60°20′, 100°20′20″; в) 70°, 80°, 33°; г) 61°, 72°, 83°; д) 33°, 66°, 71°. Можете ли вы без вычислений доказать, что в каждом случае Вася ошибся?

8.2. Следствия из теоремы о сумме углов треугольника

СЛЕДСТВИЕ 1 **Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

Доказательство. Прямой угол в прямоугольном треугольнике равен 90°. Поэтому сумма двух его острых углов равна

$$180° - 90° = 90°.$$

Таким образом, зная один из острых углов прямоугольного треугольника, можно найти другой его острый угол.

СЛЕДСТВИЕ 2 **Острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника равен 45°.**

СЛЕДСТВИЕ 3 **Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов треугольника.**

Доказательство. Пусть α — внешний угол треугольника ABC, смежный с углом A. Тогда $\alpha + \angle A = 180°$. Кроме того,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Приравниваем левые части этих равенств. Получим, что

$$\alpha + \angle A = \angle A + \angle B + \angle C,$$

поэтому $\alpha = \angle B + \angle C$.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
2. Чему равен внешний угол треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

8.20. а) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с такими же углами, что и у данного треугольника. б) Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

8.21. Сформулируйте и докажите ещё два признака равенства прямоугольных треугольников: а) по гипотенузе и острому углу; б) по катету и противолежащему острому углу.

8.22. Докажите, что сумма углов любого четырёхугольника равна 360°.

Находим величину

8.23. Найдите неизвестные углы на рисунке 254.

Ищем границы

8.24. Один из острых углов прямоугольного треугольника больше 25°. В каких границах лежит другой острый угол?

Работаем с формулой

8.25. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из этой формулы каждый из углов. в) Пусть один из острых углов увеличивается. Что происходит с другим? г) Во сколько раз один из этих углов может быть больше другого?

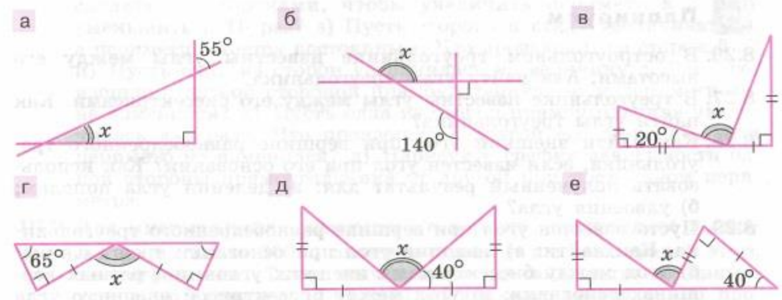
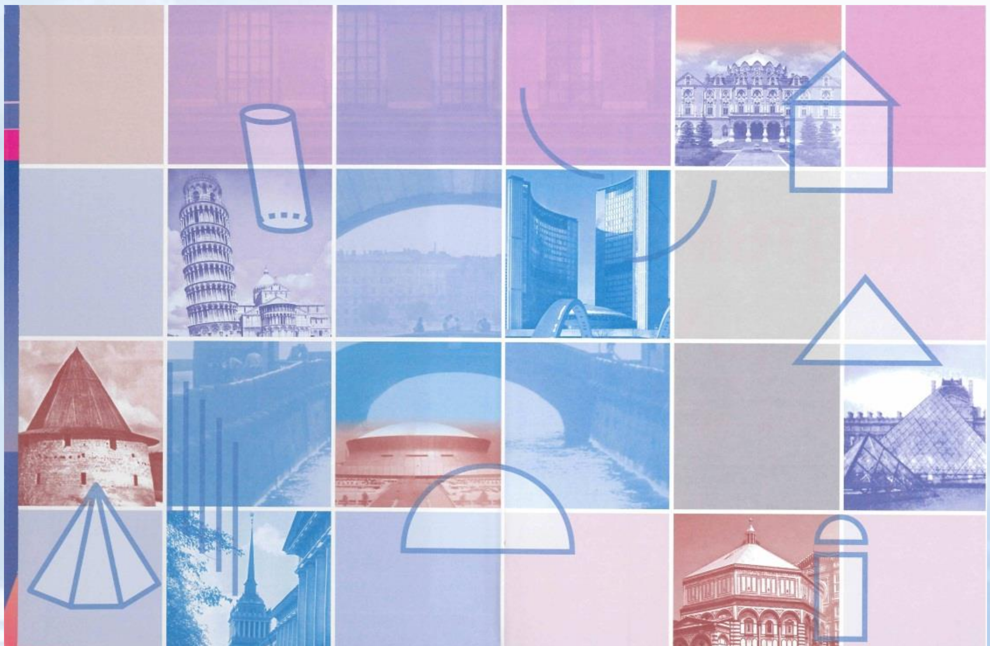


Рис. 254

Линия УМК «ГЕОМЕТРИЯ 7-9» А. Д. Александрова и др.

Справка словесника. Слово *катет* является однокоренным со словами *катастрофа, катакомбы, каталог, катаракта*. Корень *kata* греческого происхождения, означает *вниз, падать*. Интересно, что слово *катаракта* (помутнение глазного хрусталика) употреблялось раньше и в форме *катаракт* и имело два значения: водопад в горах, а также подвижные заслоны в крепостных воротах.

Слово *гипотенуза* переводится с греческого как *быть противоположным*, т. е. сторона треугольника, противоположная его прямому углу.



$H = 300$ м

$h = 146{,}6$ м

Рис. 177

равного ему отрезка. Например, высота здания, высота пирамиды, глубина колодца и т. д. (рис. 177). Для плоских фигур тоже иногда определяют высоту: для треугольников и некоторых четырёхугольников.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или её продолжение (рис. 178). Высотой треугольника называют также и длину этого перпендикуляра. Каждый треугольник имеет три высоты.

Как видно на рисунках, высота треугольника может идти внутри треугольника (рис. 178, а), совпадать со стороной треугольника (рис. 178, б) и лежать вне треугольника (рис. 178, в).

Если высота совпадает со стороной треугольника, то этот треугольник прямоугольный (см. рис. 178, б), а высота является его катетом. У прямоугольного треугольника две высоты — это его катеты, а третья высота, опущенная на гипотенузу, идёт внутри треугольника (рис. 179).

Наконец, если высота AM лежит вне треугольника ABC, то точка M лежит на продолжении стороны BC, например, за точку B (см. рис. 178, в). Тогда в прямоугольном треугольнике ABM угол ABM острый. Смежный с ним угол B треугольника ABC тупой.

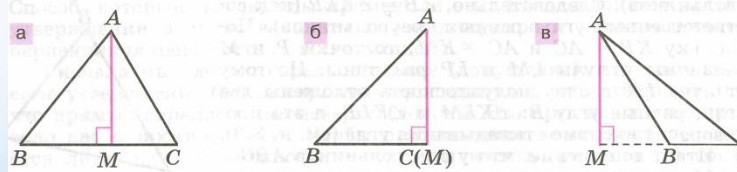


Рис. 178

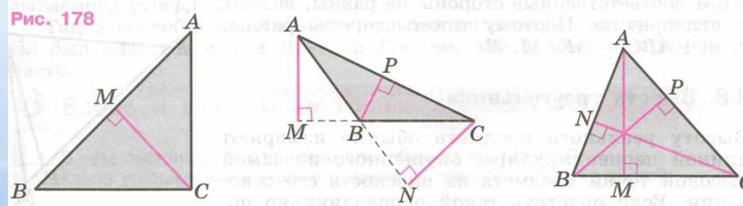


Рис. 179 Рис. 180 Рис. 181

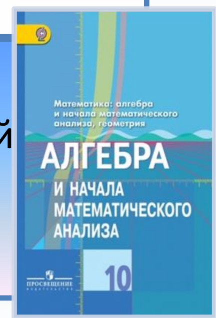
образование. Алгебра и начала математического анализа.

- Линия УМК С.М. Никольского и др. 10-11 кл.

Базовый углубленный уровень

- Линия УМК Ю.М. Колягина под редакцией А. Б. Жижченко. 10-11 кл.

Базовый и углубленный уровень



- Линия УМК Ш.А. Алимова и др. 10-11 кл.

Базовый и углубленный уровень

- Линия УМК М.Я. Пратусевича 10-11 кл.

Углубленный уровень

- Линия УМК В.Ф. Бутузов и др. под редакцией В. А. Садовничего 10-11 кл.

Базовый углубленный уровень

- Линия УМК А. Д. Александрова и др. 10-11 кл.

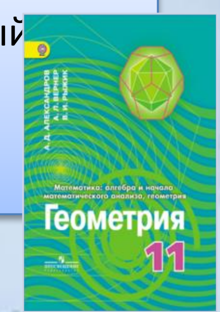
Базовый и углубленный уровни

- Линия УМК Л. С. Атанасян и др. 10-11 кл.

Базовый и углубленный уровень

- Линия УМК А. Д. Александрова и др. 10-11 кл.

Углубленный уровень



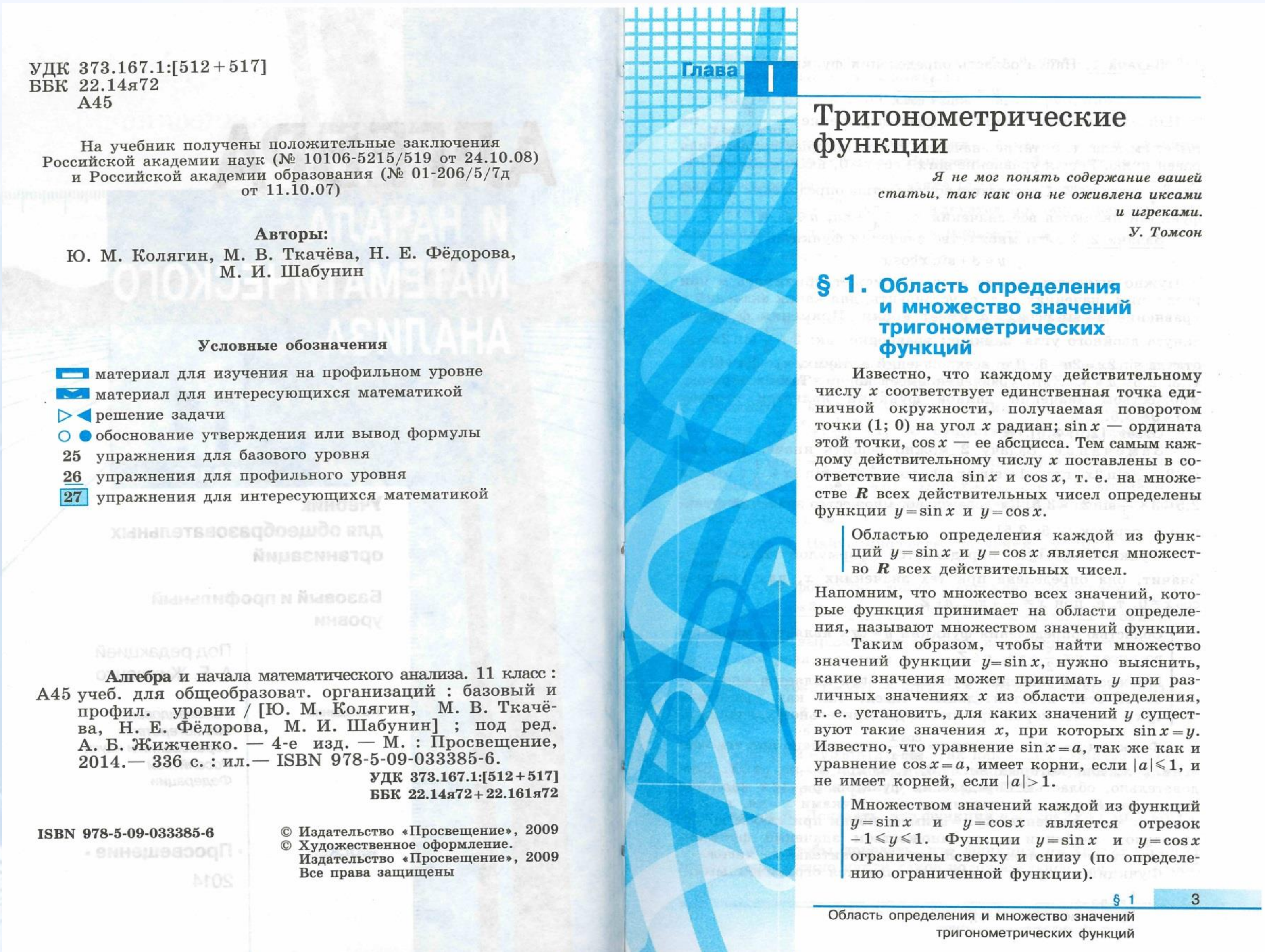
АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ю.М. Колягина 10 - 11 класс

-
-
- кие материалы
- ие тесты
- нителя

ФГОС

Особенности линии УМК «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» Ю. М. Колягина под редакцией А. Б. Жижченко.



УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72
А45

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/519 от 24.10.08) и Российской академии образования (№ 01-206/5/7д от 11.10.07)

Авторы:
Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин

Условные обозначения

- материал для изучения на профильном уровне
- материал для интересующихся математикой
- ▷ ◀ решение задачи
- ○ ● обоснование утверждения или вывод формулы
- 25 упражнения для базового уровня
- 26 упражнения для профильного уровня
- 27 упражнения для интересующихся математикой

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин] ; под ред. А. Б. Жижченко. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2014.— 336 с. : ил.— ISBN 978-5-09-033385-6.
УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-033385-6

Глава I

Тригонометрические функции

Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

У. Томсон

§ 1. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Известно, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x радиан; $\sin x$ — ордината этой точки, $\cos x$ — ее абсцисса. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве R всех действительных чисел определены функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Областью определения каждой из функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является множество R всех действительных чисел.

Напомним, что множество всех значений, которые функция принимает на области определения, называют множеством значений функции.

Таким образом, чтобы найти множество значений функции $y=\sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x из области определения, т. е. установить, для каких значений y существуют такие значения x, при которых $\sin x=y$. Известно, что уравнение $\sin x=a$, так же как и уравнение $\cos x=a$, имеет корни, если $|a|\leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a|>1$.

Множеством значений каждой из функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является отрезок $-1\leqslant y\leqslant 1$. Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограничены сверху и снизу (по определению ограниченной функции).

Особенности линии УМК «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» Ю. М. Колягина под редакцией А. Б. Жижченко.

Задача 1. Найти область определения функции

$$y=\frac{1}{\sin x+\cos x}.$$

▷ Найдем значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ не имеет смысла, т. е. такие значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x+\cos x=0$, находим $\operatorname{tg} x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. ◀

Задача 2. Найти множество значений функции

$$y=3+\sin x\cos x.$$

▷ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3+\sin x\cos x=a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3+\frac{1}{2}\sin 2x=a$, откуда $\sin 2x=2a-6$. Для всех значений a, таких, что $|2a-6|\leqslant 1$, т. е. $2,5\leqslant a\leqslant 3,5$, это уравнение имеет корни. Таким образом, множеством значений данной функции является отрезок $2,5\leqslant y\leqslant 3,5$.

Ответ. $[2,5;\ 3,5]$. ◀

Замечание. Задачу 2 можно решить иначе. Так как $y=3+\frac{1}{2}\sin 2x$, где $-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$, то $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$, откуда $2,5\leqslant 3+\frac{1}{2}\sin 2x\leqslant 3,5$. Следовательно, множество значений функции — отрезок $[2,5;\ 3,5]$.

Функция $y=\operatorname{tg} x$ определяется формулой $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Значит, она определена при тех значениях x, для которых $\cos x\neq 0$, т. е. при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Областью определения функции $y=\operatorname{tg} x$ является множество чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Множеством значений функции $y=\operatorname{tg} x$ является множество R всех действительных чисел, так как уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет корни при любом действительном значении a.

Функция $y=\operatorname{ctg} x$, где $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, определена при тех значениях x, для которых $\sin x\neq 0$, т. е. при $x\neq\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, областью определения функции $y=\operatorname{ctg} x$ является множество R с выброшенными из него точками $x=\pi n$, $n\in Z$.

Так как уравнение $\operatorname{ctg} x=a$ имеет корни при любом действительном значении a, то множеством значений функции $y=\operatorname{ctg} x$ является множество R всех действительных чисел.

Функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ не являются ограниченными.

Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ называются *тригонометрическими функциями.*

Задача 3. Найти область определения функции

$$y=\sin 3x+\operatorname{tg} 2x.$$

▷ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x+\operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, т. е. при $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел, таких, что $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ. $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ◀

Задача 4. Найти множество значений функции

$$y=3\sin x+4\cos x.$$

▷ Преобразуем функцию, используя метод вспомогательного угла («Алгебра и начала анализа, 10», гл. IX, § 4). Умножим и разделим y на $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Получим $y=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)$. Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует угол α такой, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. В качестве α можно взять $\arccos\frac{3}{5}$. Тогда $y=5(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)=5\sin(x+\alpha)$, где $-1\leqslant\sin(x+\alpha)\leqslant 1$. Поэтому $-5\leqslant y\leqslant 5$, т. е. множество значений данной функции — отрезок $[-5;\ 5]$. ◀

Задача 5. Найти множество значений функции

$$y=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x.$$

▷ Используя формулы двойного аргумента, получаем

$$y=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=2+(2\sin 2x-\cos 2x).$$

Преобразовав выражение в скобках и применив метод вспомогательного угла, получим

$$2\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)=\sqrt{5}\sin(2x-\alpha),$$

где $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда $y=2+\sqrt{5}\sin(2x-\alpha)$. Так как $-\sqrt{5}\leqslant\sqrt{5}\sin(2x-\alpha)\leqslant\sqrt{5}$, то $2-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{5}$. Следовательно, множество значений данной функции — отрезок $[2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}]$. ◀

Задача 6. Доказать, что функция $y=3\cos 2x+5\sin 2x$ ограничена.

▷ Для того чтобы доказать, что функция $y=3\cos 2x+5\sin 2x$ ограничена, нужно найти такое положительное число C, чтобы

Особенности линии УМК «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» Ю. М. Колягина под редакцией А. Б. Жижченко.

Предметный указатель

442. 1) $y=\dfrac{3x^2-2x+1}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{2x+1}$.

443. 1) $y=(2x+1)^2\sqrt{x-1}$; 2) $y=x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
3) $y=\sin 2x\cos 3x$; 4) $y=x\cos 2x$.

444. Найти производную функции $y=\log_{3x+4}(7x-4)$ в точке $x=2$.

445. Найти значения x, для которых производная функции
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$
равна -1.

446. Определить знак числа $f'(2)$, если:
1) $f(x)=e^{3-2x}\cdot x^2$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{1-x}}$.

447. Дана функция $f(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. Найти $f'(0)$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

448. Найти значения x, при которых $f'(x)\leqslant g'(x)$, если
$$f(x)=x^3+x^2+x\sqrt{3},\ g(x)=x\sqrt{3}+1.$$

449. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=-1$.

450. Найти первообразную функции:
1) $y=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{3}{4x-1}$.

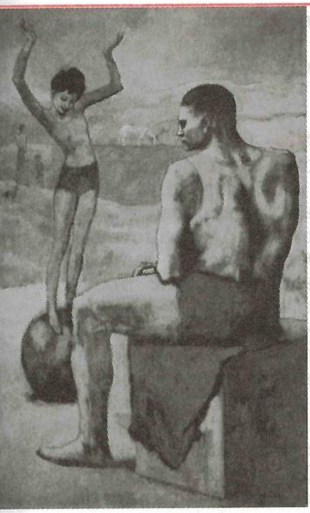
Вычислить интеграл (451—452).

451. 1) $\displaystyle\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x-1)\,dx$;
3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_0^6 x\sqrt{36-x^2}\,dx$.

452. 1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$;
3) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2+2x+3)\,dx$; 4) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-6x+8)\,dx$;
5) $\displaystyle\int_1^3 (x^{-2}+1)\,dx$; 6) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x}\,dx$.

ЛИНИЯ УМК А. Д. АЛЕКСАНДРОВА и др. 10–11 КЛАССЫ
Базовый уровень

- Программы
- Учебник
- Дидактические материалы
- Книга для учителя



I О геометрии. ▲Своеобразие геометрии заключается в неразрывной связи живого воображения со строгой логикой. Можно сказать, что геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, определение, теорема или задача, непременно присутствуют оба эти элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, а строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего понять их содержание: представить наглядно, зарисовать или ещё лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чём идёт речь. Ничего не старайтесь заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чём написано в учебнике, не поняв, как это наглядное представление точно выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Геометрия возникла из практических задач, её предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счёте в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется везде, где нужна малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и рабочему, и архитектору, и модельеру необходимо геометрическое воображение.

Установлено, что каждое десятое изобретение сделано с применением геометрии, за счёт выбора подходящей формы, удачного размещения и т. п. А ведь изобретений миллионы.

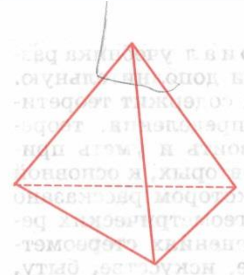


Рис. 2

ся её **рёбрами**, причём рёбра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми**. Если основание пирамиды — n-угольник, то пирамида называется **n-угольной**.

Простейшей среди всех пирамид (и даже среди всех многогранников) является треугольная пирамида, которую называют также **тетраэдром**, т. е. четырёхгранником (рис. 2). У тетраэдра четыре грани, и все они треугольники.

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а все боковые рёбра равны (рис. 3). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырёхугольные.

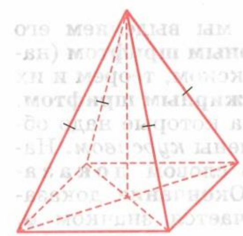


Рис. 3

III О теоретической части курса. Весь курс разбит на шесть глав (по три на каждый класс). Глава I вводная, а центральной и основной в курсе 10 класса является глава II, где изучается перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей, а также расстояния и углы. (Эту главу можно назвать «строительной геометрией», поскольку изучаемые в ней вопросы играют главную роль в строительстве. Завершает курс 10 класса глава III, в которой рассказано о важнейших пространственных фигурах — сфере и шаре, цилиндрах и конусах. Последний параграф этой главы (§ 20) посвящён геометрии окружности.

Курс 11 класса начинается главой IV о многогранниках и симметрии фигур. В главе V речь идёт об измерении объёмов тел и площадей их поверхностей.

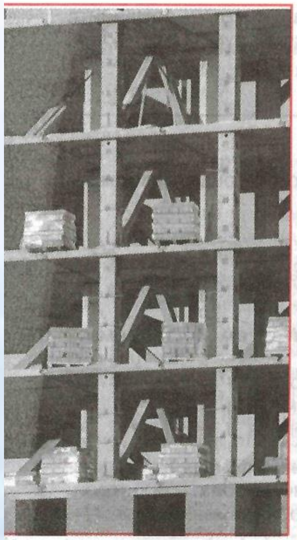
В последней же — главе VI — о координатах и векторах рассматриваются такие методы геометрии, которые возникли значительно позднее. Завершает книгу рассказ о современной геометрии.

Главы разбиты на параграфы (у них единая нумерация), а параграфы — на пункты (у пунктов двойная нумерация: например, п. 17.3 — это третий пункт из § 17).

Пункты, относящиеся *одновременно* и к базовому и к углублённому уровню образовательного стандарта по математике набраны **чёрным цветом** на цветной плашке таким образом: **24.5**.

Пункты ознакомительного характера (как, например, в заключении) набраны так: 2.1.

Пункты, относящиеся *только* к углублённому уровню, обозначены таким образом: **29.5**.



Глава II

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Эта глава — центральная и наиболее трудная в курсе геометрии 10 класса: в ней 10 из 20 параграфов этого курса. Самым важным из отношений, изучающихся в этой главе, является отношение перпендикулярности прямой и плоскости. Оно изучается в § 6—9. Опуская перпендикуляры из точек на плоскость, мы проектируем пространственные фигуры в плоские и тем самым сводим стереометрические задачи к планиметрическим. Именно это простейшее, но и важнейшее из стереометрических построений лежит в основе ортогонального проектирования и начертательной геометрии, о которых рассказано в § 13.

Изучать параллельность и перпендикулярность плоскостей значительно проще после того, как изучена перпендикулярность прямой и плоскости (см. § 10 и 11). Например, легко строится плоскость, проходящая через заданную точку и параллельная заданной плоскости (п. 11.3). И при вычислении расстояний между фигурами (§ 14) и углов между прямыми и плоскостями (§ 15) мы тоже опираемся на перпендикулярность прямой и плоскости.

Понятие о расстоянии между фигурами, частным случаем которого является понятие расстояния между точками (§ 14), позволит по-новому взглянуть на параллельные прямые и плоскости — как на прямые и плоскости, идущие на постоянном расстоянии друг от друга.

Теоремы этой главы весьма наглядны: их можно себе представлять как предложения о вертикалях и горизонталях и иллюстрировать на окружающих нас предметах. Эти иллюстрации идут, как правило, от строительства, и потому на всю главу II можно смотреть как на основы «строительной геометрии».

§ 6 Перпендикулярность прямой и плоскости

6.1 Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие столбы (они перпендикулярны поверхности земли), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку), ножки стола (они перпендикулярны полу). Вертикальный косяк двери перпендикулярен полу, и нижний край двери, прилегающий к полу, перпендикулярен косяку при всех положениях двери (рис. 73, *а*). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

а)

б)

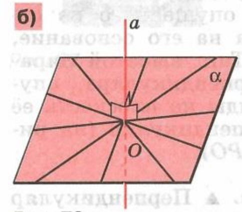


Рис. 73

Определение. **Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения** (рис. 73, *б*).

Говорят также, что **плоскость перпендикулярна прямой** или что они **взаимно перпендикулярны.** Для взаимно перпендикулярных прямой a и плоскости α применяются обозначения $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$.

Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется перпендикуляром к данной плоскости.

6.2 Перпендикуляр и наклонная. Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку — конец отрезка, но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости.**

Пусть из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены перпендикуляр AB и наклонная AC (рис. 74). Отрезок BC называется **проекцией наклонной** AC **на плоскость** α.

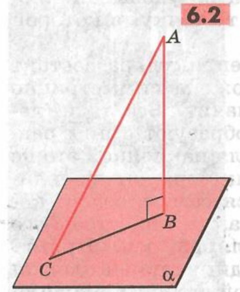


Рис. 74

Перпендикуляр AB короче наклонной AC, т. е. $AB < AC$. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC. Итак, *перпендикуляр короче наклонной, если они проведены из одной и той же точки к одной плоскости.*

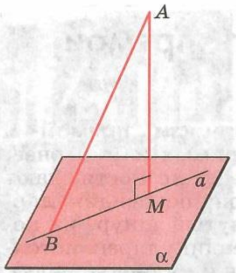


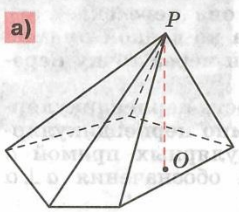
Рис. 75

Это можно сказать и так: перпендикуляр AB из точки A на плоскость α — **кратчайший из отрезков**, соединяющих точку A с точками плоскости α.

Свойство перпендикуляра быть кратчайшим отрезком является **характерным свойством**. Это значит, что справедливо и обратное утверждение: *если AB — кратчайший отрезок от точки A до плоскости α, то AB — перпендикуляр к плоскости α.*

Доказательство. Докажем это методом от противного. Допустим, что AB не перпендикуляр к α. Тогда через точку B в плоскости α проходит прямая a, не перпендикулярная к AB (рис. 75). Опустим из A перпендикуляр AM на прямую a. В прямоугольном треугольнике ABM катет AM меньше гипотенузы AB: $AM < AB$. Но тогда отрезок AB не будет кратчайшим из всех отрезков, идущих из точки A до плоскости α. Получили противоречие. Следовательно, $AB \perp \alpha$. ■

а)



б)

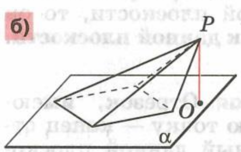


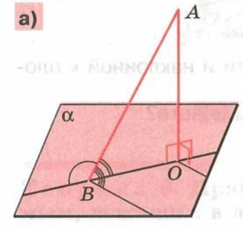
Рис. 76

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, **высотой пирамиды** называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость её основания, а также сам перпендикуляр (на рисунке 76, *а*, *б* — это отрезок PO).

6.3 О значении перпендикуляра. ▲ Перпендикуляр к плоскости играет очень важную роль и помимо того, что он является кратчайшим среди всех отрезков от данной точки до точек плоскости. Поясним ещё его значение. Положение плоскости в пространстве можно задавать, указывая перпендикулярную ей прямую и ту точку, в которой она эту прямую пересекает.

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Что это значит? Все лучи, лежащие в данной плоскости, образуют с ним равные углы — прямые углы, а для наклонной это не так (рис. 77, *а*). При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, а другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо

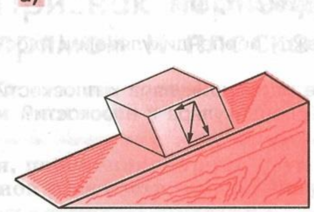
а)



б)

Рис. 77

а)



б)

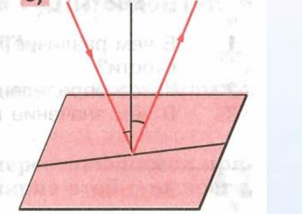


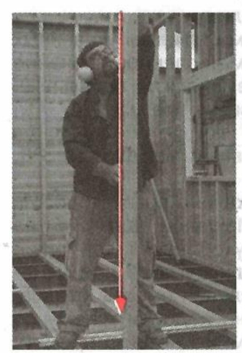
Рис. 78

видно на правильно навешенной двери. Если её край не вертикален, дверь не открывается свободно и задевает пол.

Беря примеры из физики, можно отметить, что давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру к стенке, так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней (рис. 77, *б* и 78, *а*).

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так, закон отражения гласит: «Луч падающий и луч отражённый расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образуют с ним равные углы». «Угол падения» и «угол отражения» — это углы между указанным перпендикуляром и лучом падающим и лучом отражённым (рис. 78, *б*).

Но главное значение перпендикуляра — это его роль в технике и во всей нашей жизни.



Мы, можно сказать, окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т. д.

Вертикаль перпендикулярна горизонтальной плоскости. Вертикальность проверяют отвесом (см. фото). Перпендикулярность играет главную роль в строительстве: междуэтажные перекрытия укладывают перпендикулярно столбам каркаса здания.

Как мы дальше увидим, параллельность плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами «строительной геометрии». ▼

Вопросы для самоконтроля

1. В чём различие между перпендикуляром к плоскости и наклонной к плоскости?
2. Какое определение перпендикуляра к плоскости вы знаете?
3. В чём значение перпендикуляра к плоскости?

Задачи

6.1. **Дополняем теорию** Пусть из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр и две равные наклонные. Докажите, что равны: а) проекции этих наклонных; б) углы, которые они образуют с перпендикуляром; в) углы, которые они образуют со своими проекциями. Составьте и проверьте обратные утверждения.

6.2. Пусть в тетраэдре $PABC$ ребро $PB \perp (ABC)$, $PA = PC$ и K — точка на ребре AC. а) Пусть $PK \perp AC$. Докажите, что $BK \perp AC$. б) Пусть $BK \perp AC$. Докажите, что $PK \perp AC$.

6.3. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC — наклонная к плоскости α. а) Пусть известны их длины. Как вычислить длину проекции BC? Как вычислить угол между наклонной и проекцией? б) Пусть известны длина наклонной и её угол со своей проекцией. Как вычислить длину перпендикуляра и длину проекции? в) Пусть известна длина перпендикуляра и угол между ним и наклонной. Как вычислить длины наклонной и проекции?

6.4. Пусть AB — перпендикуляр из точки A на плоскость α, AC и AD — две неравные наклонные к этой же плоскости. Докажите, что бóльшая из них: а) имеет бóльшую проекцию; б) образует с перпендикуляром больший угол; в) образует со своей проекцией меньший угол. Проверьте обратные утверждения.

6.5. В тетраэдре $PABC$ ребро PB — его высота и $AB = BC$.

а) Заполните таблицу.

N	PB	AB	PA	AC	$\angle ABC$	$\angle APC$
1	1	1			90°	
2	1	1		1		
3	1	1			120°	
4	1		2	2		
5	1		2			90°
6	1			2		90°

б)* Выберите сами три из указанных величин, дайте им численное значение и попытайтесь вычислить остальные.

в)* Установите связь между PA, AB, $\angle ABC$, $\angle APC$.

г)* Установите связь между AC, PB, $\angle ABC$, $\angle APC$.

6.6. **Прикладная геометрия** а) В землю вертикально врыт столб. Из некоторой точки на земле он виден под углом φ. Из какой ещё точки на земле он виден под тем же углом? Какую фигуру образуют все такие точки? Из каких точек на земле он виден под бóльшим углом? под меньшим углом? б) Придумайте разные способы вычисления высоты столба, если: 1) можно подойти к нему вплотную; 2) можно подойти к нему по прямой на некоторое расстояние; 3)* можно идти мимо него по прямой.

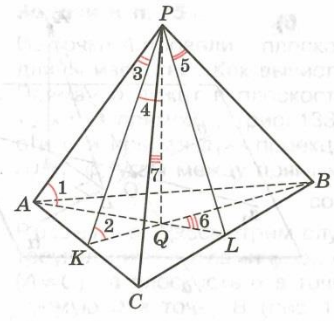


Рис. 134

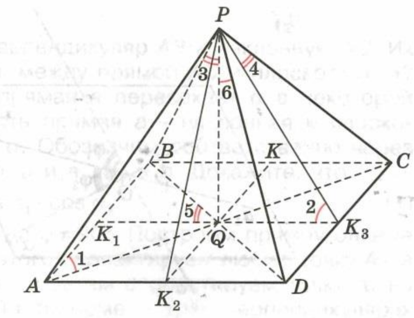


Рис. 135

15.20. В правильной n-угольной пирамиде ($n = 3$; 4) высота равна стороне основания. Вычислите угол φ, который составляет с плоскостью основания: а) боковое ребро; б) апофема, т. е. высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды.

15.21. **Прикладная геометрия** Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолёта увеличивается, а угол, под которым он виден над горизонтом, уменьшается. Взлетает этот самолёт или снижается? Решите задачу, если расстояние увеличилось в 1,5 раза, а угол над горизонтом уменьшается с 60° до 45°; с 60° до 30°. Решите задачу в общем виде.

15.22. **Прикладная геометрия** В течение солнечного дня вы наблюдаете за тенью от дерева. Как изменяется её длина?

Задачи к главе II

II.1. Дан квадрат $ABCD$. Точка X — переменная точка перпендикуляра к его плоскости, проведённого из точки B. Пусть сторона квадрата равна d. а) Найдите $|XA|$, $|XC|$, $|XD|$, если $|XB| = h$. б) Найдите $|XD|$, если $|XA| = 1$. в) Какая сторона квадрата видна из точки X под бóльшим углом? А какая диагональ? г) Докажите, что $(XAB) \perp (XBC)$, $(XAC) \perp (XBD)$. д) Будут ли перпендикулярны плоскости XAD и XCD? е) Как вычислить длину перпендикуляра из точки B на плоскость AXC, если $|XB| = h$?

II.2. Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. Точка X — переменная точка этой прямой. Сравните углы BXC и BAC. Как изменяется угол BXC при удалении точки X от A? Может ли он быть прямым? Как вычислить угол BXC, если известны стороны треугольника ABC и длина перпендикуляра из точки X на плоскость ABC?

II.3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина BB_1, точка L — середина CC_1, точка M — середина A_1B_1, точка C — середина BN. Нарисуйте перпендикуляр из: а) A на (BB_1D_1); б) A_1 на (AB_1D_1); в) D_1 на (AB_1C); г) K на (CDD_1); д) L на (BDB_1); е) M на (AB_1D_1); ж) N на (BDB_1); з) N на (DA_1B_1); и) N на (A_1C_1B). Вычислите его длину, если ребро куба равно 1.

сматривается общий отрезок этих сечений. Пусть x — расстояние от этого отрезка до ближайшего основания призмы. Выразите как функцию от этой переменной длину этого отрезка. Какой из таких отрезков является наибольшим? А наименьшим?

II.35. Дана правильная треугольная призма, у которой все рёбра равны 1. Концы переменного отрезка лежат на двух скрещивающихся диагоналях её граней, а сам этот отрезок параллелен: а) плоскости основания призмы; б) плоскости третьей её боковой грани. Выберите независимую переменную x и выразите через x длину такого отрезка. В каком положении такой отрезок является наибольшим и наименьшим?

II.36. В правильной треугольной призме, у которой все рёбра равны 1, проводится сечение: а) через вершину основания и параллельно противоположной стороне этого основания; б) через ребро основания; в) перпендикулярное медиане одного из оснований; г) перпендикулярное диагонали одной из граней; д) перпендикулярное прямой, проходящей через одну из вершин и середину ребра, не лежащего с ней в одной грани. Выберите сами независимую переменную x и выразите как функцию от этой переменной площадь такого сечения. Можете ли вы установить, в каком положении достигает наибольшего значения площадь такого сечения? А периметр?

II.37. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, PQ — его высота. Точка X лежит на ребре PC, точка Y лежит на грани APC, точка Z лежит на ребре AB. Когда достигает граничных значений (наибольшего и наименьшего) угол, который составляет с прямой PQ прямая: а) AX; б) XZ; в) BY?

Итоги главы II

Три теоремы существования и единственности можно назвать основными в данной главе.

1) Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна (теорема 10 п. 9.1).

2) Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна (теорема 11 п. 9.2).

3) Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна (теорема 13 п. 11.3).

Следствием теоремы 11 является **признак параллельности плоскостей**: две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Признаком параллельности прямых является теорема 8 (п. 8.1): две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

На предложения, обратные этим признакам параллельности, можно смотреть как на **признаки перпендикулярности прямой и плоскости**:

1) Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой (теорема 12 п. 11.2).

2) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости (теорема 9 п. 8.2).

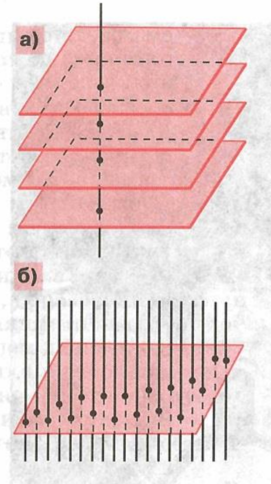


Рис. 136

Все эти теоремы дают возможность представлять себе пространство «расслоённым» на семейство параллельных плоскостей, перпендикулярных некоторой прямой (рис. 136, *а*), или «расслоённым» на семейство параллельных прямых, перпендикулярных некоторой плоскости (рис. 136, *б*).

Конечно, следует помнить следующие **четыре признака перпендикулярности (параллельности) прямой и плоскости**, а также **перпендикулярности (параллельности) плоскостей**.

1) Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости (теорема 6 п. 7.1).

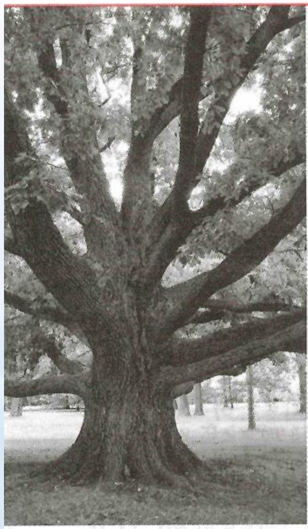
2) Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны (п. 10.3).

3) Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны (теорема 15 п. 12.2).

4) Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она параллельна этой плоскости (теорема 14 п. 12.1).

Отметим ещё **теорему о трёх перпендикулярах** (п. 13.2): наклонная к плоскости перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой, а также утверждение о равенстве углов с сонаправленными сторонами (п. 15.2).

В целом же содержание глав I и II можно назвать «Началами стереометрии», так как в этих главах речь шла в основном о прямых и плоскостях, а изучение более сложных пространственных фигур начнётся с главы III.



Заключение. Современная геометрия

1 Коренное отличие современной геометрии.

До середины XIX в. геометрия изучала фигуры одного-единственного пространства. Элементы её вы изучили в школьном курсе. Теперь же геометрия охватывает «геометрии» бесконечного множества разных воображаемых пространств, она изучает свойства самих пространств и фигур в них. В отличие от всех прочих пространств то пространство, геометрию которого мы изучали, называют трёхмерным евклидовым пространством. Наряду с ним мыслятся теперь и изучаются пространства любого числа измерений — евклидовы и неевклидовы. Что же представляют собой эти пространства, как их определяют, каков их реальный смысл?

Трёхмерное евклидово пространство можно определить как такое множество, элементы которого называются точками и в котором выполняются пять аксиом, сформулированных в § 1.

Точно так же можно определить любое другое пространство: это множество каких-то элементов — «точек», удовлетворяющее соответствующим аксиомам. Какие берутся аксиомы, такое и определяется пространство.

Например, **метрическим пространством** называется множество, в котором каждой паре элементов (точек) X, Y отнесено число — расстояние $|XY|$ с известными условиями: 1) $|XY|=0$ тогда и только тогда, когда $X=Y$; 2) $|XY|=|YX|$; 3) $|XY|+|YZ|\geqslant|XZ|$. Это аксиомы метрического пространства.

Примером метрического пространства является множество непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, если расстояние между двумя функциями f, g определить равенством

$$|fg|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

Итак, пространство в современной математике определяется как множество каких-либо элементов — «точек», наделённое теми или иными

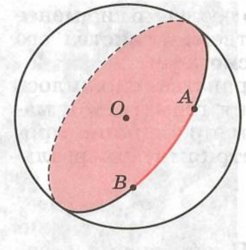
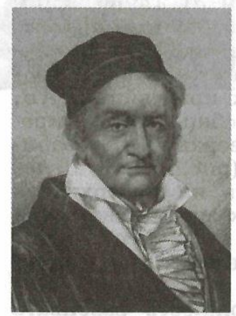


Рис. 280

сферической геометрии. Она составляет геометрическую основу наблюдательной астрономии. Именно поэтому начала сферической геометрии были разработаны ещё греческими геометрами.

На сфере кратчайшими линиями являются дуги больших окружностей (рис. 280). В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели (отличной от экватора). Поэтому при дальних полётах и дальних плаваниях, если возможно, летят или плывут не по параллели, а по дуге большой окружности. Например, кратчайший полёт из Москвы в Хабаровск проходит над севером Сибири.

Между геометрией на сфере и геометрией на плоскости много общего. На сфере также выполняются теоремы о равенстве треугольников, о равнобедренном треугольнике и т. д. Главное, что на сфере возможно свободное движение фигур в такой же степени, как на плоскости. С другой стороны, соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере другие, чем на плоскости. Так, сумма углов α, β, γ сферического треугольника больше π, а именно



Карл Гаусс

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{S}{R^2},$$

где S — площадь треугольника, а R — радиус сферы.

Сфера геометрически однородна: геометрия её в одной её части такая же, как в любой другой. Но другие поверхности, вообще говоря, геометрически неоднородны, и их внутренняя геометрия может быть очень разнообразной.

Основы внутренней геометрии поверхностей были созданы великим немецким математиком Карлом Гауссом (1777—1855). Более общий подход и более общая теория были разработаны советскими геометрами в середине XX в.

3 Возможная геометрия реального пространства.

Внутреннюю геометрию поверхности можно понимать как такую, которую развивали бы люди, живущие в самой этой поверхности.

В самом деле, представим себе какую-нибудь поверхность и живущих в ней разумных существ, не имеющих никакого понятия об окружающем пространстве. Они могли бы измерять расстояния

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Стереометрия. Ч. 2 / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1951. Смотрите также в Интернете по адресу: libriz.net/.../72853-elementarnaya-geometriya-stereometriya.html

2. *Александров А. Д.* Геометрия, 8. Учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2008.

3. *Александров А. Д.* Геометрия, 9. Учебник для школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2004.

4. *Александров А. Д.* Геометрия. Учебник для 10 класса школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006.

5. *Александров А. Д.* Геометрия. Учебник для 11 класса школ с углублённым изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006.

6. *Александров А. Д.* Стереометрия / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — Висагинас: Alfa, 1998.

7. *Анрах Дж. Тимоти.* Удивительные фигуры / Анрах Дж. Тимоти. М.: АСТ, Астрель, 2002.

8. *Баврин И. И.* Новые задачи по стереометрии / И. И. Баврин, В. А. Садчиков. — М.: Владос, 2000.

9. *Веннинджер М.* Модели многогранников / М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.

10. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: Наука, 1968. Смотрите также в Интернете по адресу: ilib.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm

11. *Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 1996.

12. *Волошинов А. В.* Математика и искусство. — М.: Просвещение, 2000.

13. *Гильберт Д.* Наглядная геометрия / Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен. — М.: Наука, 1981. Смотрите также в Интернете по адресу: www.bookshunt.ru/b43943_naglyadnaya_geometriya

14. *Готман Э. Г.* Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. — М.: МЦНМО, 2006.

15. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии / Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

16. Журнал «Квант». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/

17. *Костицын В. Н.* Практические занятия по стереометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2007.

18. *Костицын В. Н.* Моделирование на уроках геометрии / В. Н. Костицын. — М.: Экзамен, 2004.

19. *Кушнир И. А.* Треугольник и тетраэдр в задачах / И. А. Кушнир. — Киев: Факт, 2004.

20. *Литвиненко В. Н.* Многогранники / В. Н. Литвиненко. — М.: Вита-Пресс, 1995.

21. *Литвиненко В. Н.* Сборник задач по стереометрии / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1998.

22. *Литвиненко В. Н.* Сборник типовых задач по геометрии. 10—11 / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1999.

23. *Литвиненко В. Н.* Задачи на развитие пространственных представлений / В. Н. Литвиненко. — М.: Просвещение, 1991.

24. *Лурье М. В.* Геометрия. Техника решения задач / М. В. Лурье. — М.: УНЦ ДО, Физматлит, 2002.

25. Смотрите сайт «Математические этюды» в Интернете по адресу: http://www.etudes.ru/

26. *Петров В. А.* Математика. Прикладные задачи / В. А. Петров. — М.: Дрофа, 2010.

27. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.

28. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 2 / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2006.

29. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

30. *Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.

31. *Рутерсвард О.* Невозможные фигуры / О. Рутерсвард. — М.: Стройиздат, 1990.

32. *Севрюков П. Ф.* Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. — М.: Ставрополь: Илекса, 2008.

33. *Смирнова И. М.* В мире многогранников / И. М. Смирнова. — М.: Просвещение, 1995.

34. *Шестаков С. А.* Векторы на экзаменах / С. А. Шестаков. — М.: МЦНМО, 2005.

35. *Яковлев Г. Н.* Геометрия / Г. Н. Яковлев. — Висагинас: Alfa, 1998.

36. *Иванов С. Г.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2013.

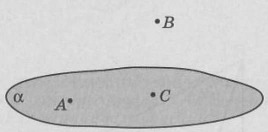
Методический шлейф к УМК А.Д. Александрова «Геометрия»

ГЛАВА I ОСНОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

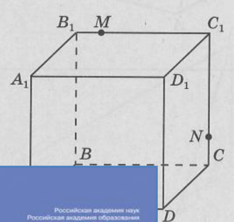
С-2 **К пп. 1.1—1.3**

Вариант 1

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Изобразите точки A и D, общие для плоскостей α и β; точку B, принадлежащую α, но не принадлежащую β; точку C, принадлежащую β, но не принадлежащую α. Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α, и в плоскости β; б) лежащую в плоскости α, но не лежащую в плоскости β; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.
2. Точки A и C расположены на плоскости α, а точка B — вне плоскости α. Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков AB и AC? Пусть точка C — середина отрезка AD. Изобразите точку D. Лежит ли она в плоскости α?

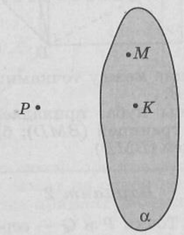


3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD).

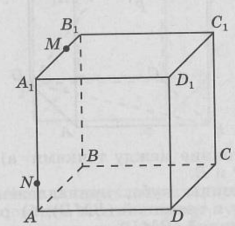


Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Изобразите точки M и A, общие для плоскостей α и β; точку K, принадлежащую α, но не принадлежащую β; точку P, принадлежащую β, но не принадлежащую α. Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α, и в плоскости β; б) лежащую в плоскости α, но не лежащую в плоскости β; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.
2. Точки M и K расположены на плоскости α, а точка P — вне плоскости α. Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков MK и PK? Пусть точка K — середина отрезка MA. Изобразите точку A. Лежит ли она в плоскости α?



3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD).



в 2 раза меньше одной из сторон основания. Обозначив высоту параллелепипеда h, выразите объем параллелепипеда как функцию от h. Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

Вариант 2

Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, периметр основания которых 18 см, а одна из сторон основания в 2 раза меньше высоты параллелепипеда. Обозначив длину одной из сторон основания параллелепипеда a, выразите объем параллелепипеда как функцию от a. Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

ГЛАВА VI КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

С-32 **К пп. 29.2—29.3**

Вариант 1

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A(-3)$, $B(\sqrt{2})$, $C(1)$, $D(5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$, $C(5; -1)$, $D(1; -4)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xyz и в ней точки $A(-3; 2; 4)$, $B(2; -3; -5)$, $C(4; 2; 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B(1; 3; 2)$, $C(-1; 3; 4)$, $A(m; 0; 0)$. При каких значениях m треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C?

Вариант 2

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A(-5)$, $B(-1)$, $C(\sqrt{3})$, $D(5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A(-1; 5)$, $B(-4; 1)$, $C(2; -3)$, $D(5; 1)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xyz и в ней точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; -2; 5)$, $C(-2; -4; 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B(2; 3; 1)$, $C(4; 3; -1)$, $A(0; 0; m)$. При каких значениях m треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C?

С-33 **К пп. 29.4—29.5**

Вариант 1

1. Напишите уравнение окружности на плоскости xOy с центром в точке $A(-2; 3)$ радиуса 2.
2. Напишите уравнение сферы в системе координат xyz с центром в точке $A(-2; 3; 1)$ радиуса 3.
3. Какую фигуру задает уравнение $x^2 + (y - 4)^2 = 2$: а) на плоскости xOy; б) в системе координат xyz?
4. Напишите уравнение сферы с диаметром AB, если $A(-2; 3; 0)$ и $B(2; -1; 4)$.
5. Изобразите множество точек пространства, заданных уравнением $x + y = 3$. Начните с пересечения его с плоскостью xOy.

Методический шлейф к УМК А.Д. Александрова «Геометрия»

Тест №1 (Повторение планиметрии)

1. В треугольнике ABC со сторонами 5 см, 12 см и 13 см синус меньшего из углов равен:
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{5}{13}$; г) $\frac{5}{7}$.
2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 90°, а основание треугольника равно 12 см. Площадь треугольника равна:
а) 72 см²; б) 36 см²; в) $12\sqrt{2}$ см²; г) $36\sqrt{3}$ см².
3. В треугольнике ABC со сторонами 5, 12 и 15 косинус большего из углов равен:
а) $\frac{5}{12}$; б) $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $-\frac{7}{15}$.
4. В треугольнике ABC, где угол C прямой, $CA = 12$, $CB = 16$, медиана, проведенная к гипотенузе, равна:
а) 10; б) 7,5; в) 8; г) 6.
5. В треугольнике ABC, где $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$, $AC = \sqrt{6}$, длина стороны AB равна:
а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 3; г) $1{,}5\sqrt{6}$.
6. В треугольнике ABC, где $AB = 12$ дм, $AC = 15$ дм и $\angle A = 30°$, сторона AC разделена точками K и P на равные отрезки $AK = KP = PC$, тогда площадь треугольника BPC равна:
а) 1,5 м²; б) 0,15 м²; в) 12 дм²; г) 60 дм².
7. В треугольнике ABC $AB = 6$, $AC = 4$ и $\angle A = 60°$, треугольник MNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{3}{2}$. Большая сторона треугольника MNP равна:
а) $3\sqrt{7}$; б) $7\sqrt{3}$; в) 12; г) 9.
8. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $BC = 10{,}5$ см, AK — биссектриса. Длина большего из отрезков BK и KC равна:
а) 6 см; б) 4,5 см; в) 5,25 см; г) 7 см.
9. Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 см и 14 см. Площадь этого треугольника равна:
а) 98 см²; б) $3\sqrt{187}$ см²; в) 84 см²; г) $6\sqrt{187}$ см².
10. В треугольнике ABC $BA = 8$ см, $BC = 10$ см. На стороне BA отложен отрезок BM, равный 5 см, а на стороне BC — отрезок BK, равный 4 см. Площадь треугольника MBK составляет от площади треугольника ABC:
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0,4.
11. Если в треугольнике ABC угол A тупой, $\sin A = \frac{12}{13}$, $AB = 13$, $AC = 3$, то длина стороны BC равна:
а) $4\sqrt{14}$; б) $4\sqrt{17}$; в) $4\sqrt{11}$; г) $4\sqrt{13}$.
12. В прямоугольном треугольнике высота и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол 15°. Косинус угла, смежного с меньшим углом этого треугольника, равен:
а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Периметр прямоугольного треугольника равен 72 м, а радиус вписанной в него окружности равен 6 м. Тогда диаметр описанной вокруг этого треугольника окружности равен:
а) 30 м; б) 15 м; в) 24 м; г) 12 м.
14. В ABC вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6{,}5$. Площадь треугольника ABC равна:
а) 80 см²; б) 84 см²; в) 87,5 см²; г) 90 см².

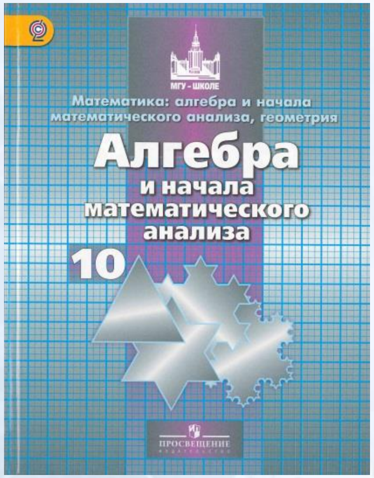
Тест № 2 (Повторение планиметрии)

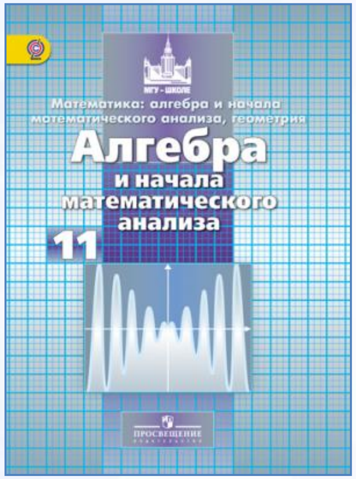
1. Если в параллелограмме $ABCD$ AM — биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BM = 2$ см, $MC = 4$ см, то периметр параллелограмма равен:
а) 20 см; б) 16 см; в) нельзя определить; г) 24 см.
2. Периметр ромба равен 40 см, а одна из диагоналей 12 см, тогда радиус вписанной в ромб окружности равен:
а) 9,6 см; б) 4,8 см; в) 4 см; г) 5,6 см.
3. В прямоугольнике $ABCD$ $BC > AB$, диагональ AC равна 13, расстояние от точки B до AC равно 6, тогда тангенс угла CAD равен:
а) 0,6; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.
4. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BCA = 30°$, $AC = 10$, тогда площадь прямоугольника равна:
а) $25\sqrt{3}$; б) 25; в) 75; г) 37,5.
5. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC. Площадь параллелограмма 12, тогда площадь треугольника AMD:
а) 6; б) 8; в) определить нельзя; г) 4.

4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Если $CA = CB = CC_1 = 2\sqrt{2}$, то площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер C_1A_1, C_1B_1, B_1B, равна:
а) $2\sqrt{3}$ см²; б) $3\sqrt{3}$ см²; в) $1{,}5\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
5. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны по 2 см. Углы A_1AB и A_1AC — острые и равны между собой. Площадь грани BB_1C_1C равна:
а) 4 см²; б) $2\sqrt{2}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
6. В прямом круговом цилиндре высотой 5 см проведен отрезок MN длиной 13 см, концы которого лежат на окружностях верхнего и нижнего оснований. Если радиус основания 10 см, то расстояние от оси цилиндра до отрезка MN равно:
а) $6\sqrt{3}$ см; б) 4,5 см; в) 8 см; г) 10 см.
7. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ двугранный угол при боковом ребре AA_1 равен 120°, расстояния от ребра A_1A до ребер B_1B и C_1C равны соответственно 4 см и 6 см. Тогда если $A_1A = \sqrt{19}$ см, то площадь грани BB_1C_1C равна:
а) $19\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{19}$ см²; в) 38 см²; г) $2\sqrt{3}$ см².
8. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с основанием угол 45°, с одной из боковых граней угол 30°, то с другой боковой гранью эта диагональ образует угол:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) arctg 2.
9. Если в правильной треугольной пирамиде тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен a, то тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания равен:
а) a; б) $\frac{1}{2}a$; в) $\frac{2}{3}a$; г) $2a$.
10. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны по $5\sqrt{5}$ см, значит, высота пирамиды равна:
а) 5 см; б) 10 см; в) $10\sqrt{2}$ см; г) $7\sqrt{5}$ см.
11. В основании пирамиды лежит параллелограмм, диагонали которого 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Площадь каждой боковой грани равна:
а) 12 см²; б) 16 см²; в) 20 см²; г) 8 см².
12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, в котором биссектриса делит катет на отрезки 3 и 5. Боковая грань, содержащая гипотенузу основания, — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания. Площадь сечения, проходящего через медиану к гипотенузе основания и вершину пирамиды, равна:
а) 25; б) $25\sqrt{3}$; в) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{25}{2}$.
13. Осевое сечение конуса — треугольник, две стороны которого равны 8 см и 20 см. Угол наклона образующей к плоскости основания равен:
а) arctg$2\sqrt{6}$; б) arcsin 0,4; в) arccos$\frac{\sqrt{6}}{4}$; г) arcctg$\frac{\sqrt{6}}{3}$.
14. В конус с высотой PO вписали правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ (основание пирамиды вписано в основание конуса). Оказалось, что все ребра пирамиды равны. Если радиус основания конуса равен R, то расстояние от центра основания конуса до боковой грани пирамиды равно:
а) $R\sqrt{3}$; б) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{R}{2}$; г) $R\sqrt{2}$.
15. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$. Проекцией

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С.М. Никольского 10 - 11 класс





- Программы
- Учебник
- Дидактические материалы
- Тематические тесты
- Книга для учителя

Линия УМК С. М. Никольского и др.

УДК 373.167.1: [512+517]
ББК 22.14я72
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/15 от 31.10.07)
и Российской академии образования (№ 01–207/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения:

— начало материала, необязательного для базового уровня

— окончание материала, необязательного для базового уровня

1.3* — пункт для углубленного изучения

— факты, свойства, определения, формулы, которые нужно помнить

1.2 — задания для базового уровня

6.8 — задания для профильного уровня

5.1° — задания для устной работы

3.7* — задания повышенной трудности

123 — задания для повторения

Алгебра и начала математического анализа. 10 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 12-е изд. — М.: Просвещение, 2013. — 430 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-030339-2.

Учебник соответствует федеральному компоненту государственного стандарта общего образования по математике и содержит материал как для базового, так и для профильного уровня. По нему можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы.

Учебник нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы.

УДК 373.167.1: [512+517]
ББК 22.14я72 + 22.161я72

ISBN 978-5-09-030339-2

Глава 1
Корни, степени, логарифмы

$$\sqrt{a^2}=a$$
$$3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}$$
$$2^{\log_2 5}=5$$

§ 1. Действительные числа

1.1. Понятие действительного числа

Первые числа, с которыми вы познакомились в школе, — это **натуральные числа:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Множество натуральных чисел обладает тем свойством, что сумма и произведение любых двух натуральных чисел являются натуральными числами, а разность и частное необязательно являются натуральными числами.

Затем вы изучали **целые числа.** Множество целых чисел состоит из натуральных чисел, целых отрицательных чисел и числа «нуль»: ... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...

Сумма, разность и произведение любых двух целых чисел являются целыми числами, а частное не всегда целое число. Вопросы, связанные с делимостью целых чисел, рассмотрены в пп. 1.8—1.10.

Наконец, вы узнали, что есть **рациональные числа.** Число называют рациональным, если его можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное.

Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Каждое рациональное число может быть разложено в бесконечную десятичную периодическую дробь (для нахождения этого разложения можно разделить уголком числитель дроби p на ее знаменатель q).

Верно и обратное: каждая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.

Таким образом, рациональные числа имеют два представления (две формы записи) — одно в виде дроби $\frac{p}{q}$, а другое в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Линия УМК С. М. Никольского и др.

ПРИМЕР 2. Докажем, что для любых положительных чисел x справедливо неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2. \qquad (5)$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant 1, \qquad (6)$$

в левой части которого записано среднее арифметическое положительных чисел x и $\frac{1}{x}$, а в правой — их среднее геометрическое. Следовательно, неравенство (6) справедливо на основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Но тогда на основании утверждения 5 справедливо неравенство (5), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. Докажем, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc. \qquad (7)$$

Из справедливости неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел следует справедливость неравенств

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$a + c \geqslant 2\sqrt{ac},$$
$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получим, что справедливо неравенство (7), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$4(a^3 + b^3) \geqslant (a + b)^3. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение $A = 4(a^3 + b^3) - (a + b)^3$. Сначала преобразуем его:

$$A = 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= (a + b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2) =$$
$$= (a + b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = 3(a + b)(a - b)^2.$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $A \geqslant 0$, т. е. доказана справедливость неравенства

$$4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geqslant 0. \qquad (9)$$

По утверждению 4 из справедливости неравенства (9) следует справедливость неравенства (8), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}. \qquad (10)$$

Левую часть неравенства (10) можно записать в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n + 1}$, а правую — в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n}$.

Так как $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n > 0$ для любого натурального числа n, то по утверждению 5

$$\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{2}{4n^2 + 4n}$$

и неравенство (10) доказано.

ПРИМЕР 6. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{4}. \qquad (11)$$

Применяя неравенство (10) и утверждение 2, получаем, что

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n + 2}. \qquad (12)$$

Но правая часть этого неравенства меньше $\frac{1}{2}$, поэтому

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Деля обе части этого неравенства на 2, получим неравенство (11). Справедливость неравенства (11) доказана.

Отметим, что, строго говоря, доказательство неравенства (12) надо проводить методом математической индукции.

ПРИМЕР 7. Пусть a и b — любые действительные числа, такие, что $a + b = 2$. Докажем, что справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2. \qquad (13)$$

Обозначим $a = 1 + c$, тогда $b = 1 - c$, где c — некоторое действительное число, и

$$a^4 + b^4 = (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4. \qquad (14)$$

Так как $2 + 12c^2 + 2c^4 \geqslant 2$ для любого действительного числа c, то из справедливости равенства (14) следует справедливость неравенства (13), что и требовалось доказать.

Линия УМК С. М. Никольского и др.

Исторические сведения

Еще в глубокой древности появились азартные игры. В Древней Греции и Риме широкое распространение получили игры в астрагалы (т. е. бросание костей из конечностей животных) и в игральные кости (кубики с нанесенными на гранях точками). В средневековой Европе азартные игры способствовали зарождению и становлению комбинаторики и теории вероятностей.

Задачи о дележе ставки встречались уже в рукописных арифметических учебниках XIII в. В них требовалось справедливо разделить ставку между двумя игроками, если игра прервана по какимлибо причинам. В работе итальянского математика Луки Пачоли (1445—1514) «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (1494) она сформулирована так.

«Необходимо разделить ставку между игроками в том случае, когда один имеет пять выигранных партий, а другой — две, договорились же играть до шести выигранных партий».

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Никколо Тарталья (1499—1557).

Задачи о дележе ставки оставались нерешенными до середины XVII в., когда возникла переписка французских математиков Блеза Паскаля (1623—1662) и Пьера Ферма (1601—1665), опубликованная в Тулузе в 1679 г. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению таких задач, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Применив методы комбинаторики, Паскаль предложил решение задачи в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша *r* партий, а другому — *s* партий. Полученное им решение данной задачи привело к введению в теорию вероятностей понятия математического ожидания. Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

В 1657 г. голландский математик Христиан Гюйгенс (1629—1695) опубликовал печатную работу под названием «О расчете

253 (МГУ, геогр. ф-т). По реке из пункта A в пункт B вышел катер. Одновременно из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

254 (РЭА). Моторная лодка проплыла по озеру, а потом поднялась вверх по реке, впадающей в озеро. Путь по озеру на 30% больше, чем путь по реке, а скорость движения лодки против течения на 10% меньше, чем по озеру. На сколько процентов время движения по озеру больше времени движения по реке?

255 Токарь ежедневно перевыполняет норму на 20 деталей. Сколько деталей ежедневно обрабатывает токарь, если пятидневную норму он выполняет за три дня?

256 Отец сказал: «Если удвоенный теперешний возраст моего сына уменьшить на утроенный возраст, который он имел 6 лет назад, то получится его возраст в данное время». Сколько лет сыну?

257 Для экскурсии нужно собрать денег. Если каждый экскурсант внесет по 7,5 р., то на расходы не хватит 44 р. Если каждый внесет по 8 р., то останется 44 р. Сколько человек принимало участие в экскурсии?

258 (МГУЭСИ). На трех складах находится 420 м^3 дров. На первом складе 110 м^3, на втором складе на несколько кубометров больше, чем на первом, а на третьем — на столько же кубометров больше, чем на втором. Сколько кубометров дров на втором складе?

259 (МГУЭСИ). Ученики собрали 3,2 кг семян белой акации, желтой акации, клена и липы. Сколько килограммов семян желтой акации собрали ученики, если семян белой акации они собрали в 3 раза больше, чем семян липы, семян клена собрано в 2 раза больше, чем семян белой акации и липы вместе, а семян желтой акации на 1,2 кг больше, чем семян клена?

260 Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше скорости велосипедиста. Они встретились посередине между городами A и B. Сколько часов был в пути велосипедист?

261 Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Через 1,5 ч вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного поезда. Через 15 ч после своего выхода пассажирский поезд обогнал товарный поезд на 21 км. Определите скорость товарного поезда.

Линия УМК «МГУ – школе» С. М. Никольского и др.

МГУ-школе

Обратим внимание на необходимость подробной записи в подобных вычислениях, так как поспешность в «сворачивании» вычислений ухудшает результативность обучения.

4.34. а) Вычислите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке $x_0 = 0$, если $f(x) = \frac{5}{x^2 ...}$

Решение. $f'(x) = \left(\frac{5}{x^2+1}\right)' = \frac{5'\cdot(x^2+1) ...}{(x^2 ...}$ $= \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$; $f'(0) = 0$.

4.36. Вычислите значение произ... $y = (x+1)^{10}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Так как $y(x) = x^{10} + ...$ $+ C_{10}^8 x^2 + C_{10}^9 x + 1$, то $y'(x) = 10x^9 + 9...$ $+ 2C_{10}^8 x + C_{10}^9$. Тогда $y'(0) = C_{10}^9 = C_{10}^1 = 1...$

4.5. Производные элементарных фун...

В данном пункте доказаны формулы... основных элементарных функций, изуч... Доказательство формулы

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

для любого натурального $n \geqslant 2$ проведе... тической индукции (это доказательств... другие, необязательные при обучении... Далее доказывается формула $(x^{-n})' = -n...$ рой на доказанное в п. 2.4 равенство li... ваются формула

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

и ее частный случай $(e^x)' = e^x$.

Формула

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

и ее частный случай $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ доказы... доказанное в п. 2.4 равенство $\lim\limits_{t \to 0} \ln(1 ...$ зования производной обратной функци... ся позже).

Решения и комментарии

4.41. а) Для любого $x \neq 0$ найдите ... ции $y = \frac{1}{x^{21}}$.

Решение. Для любого $x \neq 0$ имее... $y' = (x^{-21})' = -21x^{-22}$.

1. $\sqrt[3]{x^3-2x^2+4x+5} > 1+x$. 2. $(2x+1)^5 < (x^2-7x+15)^5$.
3. $\left(\frac{6}{7}\right)^{4-x} > \left(\frac{6}{7}\right)^{5x-2}$. 4. $5^{\cos 2x} < 5^{\cos^2 x ...}$

С-31 **Уравнения...**

I вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{x+3} = x+1$. 2. $\sqrt[4]{x^2-5x} = \sqrt[4]{2x^2-4x ...}$
3. $|\sin x| = \sin x \cos x$. 4. $\lg(x^4-x^2-6) = \lg(x ...$
5. $x^2+x+\sqrt[6]{x-1} = \sqrt[6]{x-1}+12$.

II вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{x-2} = x-4$. 2. $\sqrt[6]{x^2-4x} = \sqrt[6]{2x^2-5x ...}$
3. $|\cos x| = \sin x \cos x$. 4. $\lg(x^4-x^2-3) = \lg(x ...$
5. $x^2-x+\sqrt[6]{x-2} = \sqrt[6]{x-2}+20$.

III вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x+5} = 5-x$. 2. $\sqrt[8]{x^2+2x} = \sqrt[8]{2x^2-x ...}$
3. $|\sin x| = -\sin x \cos x$. 4. $\lg(x^4+x^2-22) = \lg ...$
5. $x^2-3x+\lg(x+1) = \lg(x+1)+10$.

IV вариант

Решите уравнение (1—5):

1. $\sqrt{2x+3} = 6-x$. 2. $\sqrt[10]{x^2-2x} = \sqrt[10]{2x^2+ ...}$
3. $|\cos x| = -\sin x \cos x$. 4. $\lg(x^4+x^2-21) = \lg ...$
5. $x^2+3x+\lg(x+2) = \lg(x+2)+18$.

С-32 **Уравнения-следствия (про...**

I вариант

Решите уравнение (1—6):

1. $\frac{x^2-x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$. 2. $3^{\log_3(x+4)} = x^2+2x- ...$

Вариант 6

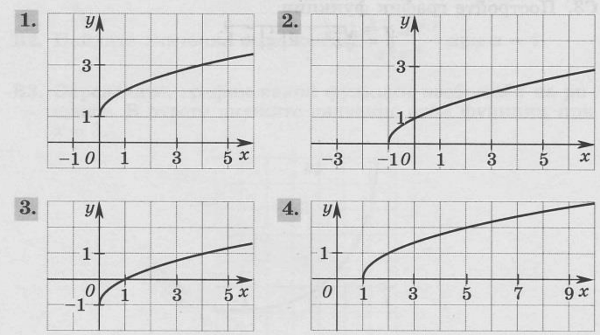
Часть В. Запишите правильный ответ

B1. Вычислите: $\left(-2\sqrt[5]{2}\right)^5 + \sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{5}$.

B2. Найдите наименьшее натуральное значение b, при котором имеет смысл выражение $\sqrt[6]{b(b-7)}$.

B3. На каком рисунке изображён график функции

$$y = \sqrt{x} - 1?$$



B4. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}}$ при $x = \sqrt[11]{9^{12}}$.

B5. Вычислите:

$$\sqrt[5]{10-\sqrt{68}}\cdot\sqrt[5]{10+\sqrt{68}}.$$

B6. Упростите выражение

$$4b^2\sqrt[5]{2b^{-8}} + 3b\sqrt[5]{2b^{-3}} - \sqrt[5]{64b^2}$$

и найдите его значение при $b = 4$.

B7. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{\left(36-16\sqrt{5}\right)^2} - 2\sqrt{5}.$$

Линия УМК В.Ф. БУТУЗОВА и др.
10 – 11 класс. Базовый и углублённый уровни

- **Рабочая программа**
- **Учебник**
- **Дидактические материалы**
- **Методические рекомендации**

Оглавление
10-11 класс

Введение

Дорогие десятиклассники!

Вы приступаете к изучению той части геометрии, которая называется стереометрией. В ней рассматриваются свойства фигур, расположенных в пространстве. Само слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — твёрдый, пространственный и «метрео» — измеряю. Представление о пространственных геометрических фигурах дают окружающие нас предметы. Рассматривая их и принимая во внимание только форму предметов, мы приходим к таким геометрическим понятиям, как параллелепипед, пирамида, призма, цилиндр, конус, шар (рис. 1) и т. д. Эти и любые другие геометрические фигуры являются воображаемыми (абстрактными) объектами в отличие от реальных предметов, имеющих форму той или иной геометрической фигуры. Так, например, говоря, что футбольный мяч имеет форму шара, мы понимаем, что мяч не является идеальным шаром в том смысле, как это понимается в геометрии. Любую геометрическую фигуру, в частности шар, мы будем рассматривать как некоторое множество точек.

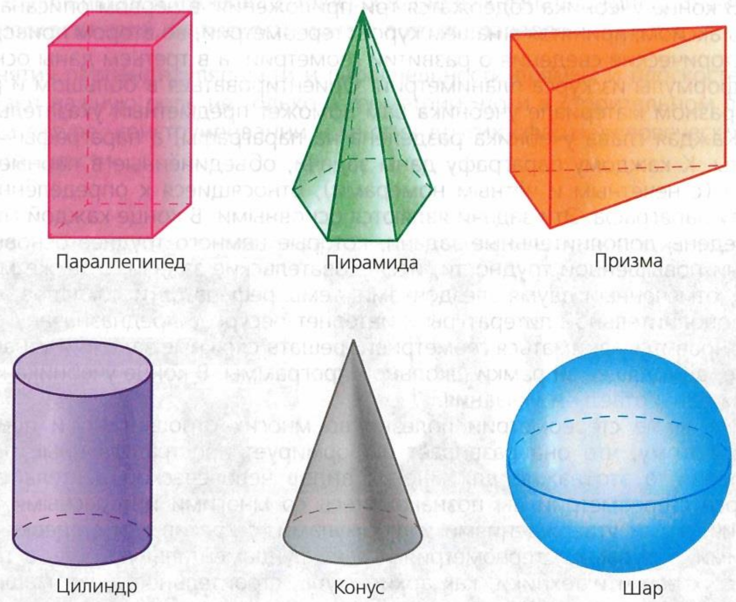


Рис. 1

В планиметрии, которую мы изучали в 7—9 классах, простейшими и, можно сказать, основными фигурами были точки и прямые. При этом все точки, все прямые и все остальные плоские фигуры находились в одной и той же плоскости. В стереометрии наряду с точками и прямыми к числу основных фигур добавляются плоскости. Представление о плоскости даёт гладкая поверхность стола, хотя это и не вся плоскость, а только её часть. Всю плоскость представляют простирающейся бесконечно во все стороны. В отличие от планиметрии, где была только одна плоскость, в стереометрии мы будем иметь дело со многими плоскостями, расположенными в пространстве.

Мы рассмотрим различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей, уделив особое внимание случаям перпендикулярности и параллельности (глава 1), затем будем изучать многогранники, к числу которых относятся параллелепипеды и пирамиды (глава 2), потом тела и поверхности вращения (цилиндр, конус, сфера, шар; см. рис. 1) и в последней (четвёртой) главе познакомимся с координатно-векторным аппаратом геометрии и его применениями. Материал, отмеченный одной звёздочкой, предназначен для углублённого уровня. Он не обязателен для базового уровня.

В конце учебника содержатся три приложения: в первом описана система аксиом, принятая в нашем курсе стереометрии, во втором приводятся исторические сведения о развитии геометрии, а в третьем даны основные формулы из курса планиметрии. Ориентироваться в большом и разнообразном материале учебника вам поможет предметный указатель.

Каждая глава учебника разделена на параграфы, а параграфы — на пункты. К каждому параграфу даны задачи, объединённые в парные задания (с нечётным и чётным номерами), относящиеся к определённому пункту параграфа. Эти задачи являются основными. В конце каждой главы приведены дополнительные задачи, которые немного труднее основных. Задачи повышенной трудности, исследовательские задачи, а также материал, отмеченный двумя звёздочками, темы рефератов и докладов, список дополнительной литературы и интернет-ресурсов предназначены тем, кому нравится заниматься геометрией, решать сложные задачи и узнавать новое, выходящее за рамки школьной программы. В конце учебника к задачам даны ответы и указания.

Изучение стереометрии полезно во многих отношениях, и прежде всего потому, что она развивает и формирует пространственные представления, а это важно для многих видов человеческой деятельности. В курсе стереометрии вы познакомитесь со многими интересными геометрическими утверждениями и формулами, с красивыми стереометрическими фигурами. Стереометрия играет фундаментальную роль в таких областях науки и техники, как архитектура, строительное дело, машиностроение, конструкторская деятельность и многих других.

Авторы

Глава 1

Прямые и плоскости в пространстве

В начале первой главы мы сформулируем аксиомы, содержащие основные (наглядно очевидные) утверждения о взаимном расположе точек, прямых и плоскостей в пространстве, а затем, опираясь на эти аксиомы, рассмотрим различные случаи взаимного расположения пр и плоскостей. Особое внимание будет уделено перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей и параллельности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Многочисленные примеры, иллюстрирующие эти случаи взаимного расположения прямых и плоскостей, мы видим в окружающей нас обстановке: колонны зданий перпендикулярны к плоскости земли, а троллейбусные прово параллельны этой плоскости, плоскость стены комнаты перпендикуля к плоскости пола, а плоскости пола и потолка параллельны и т. д.

Понятия перпендикулярности и параллельности прямых и плоскосте играют важную роль не только в геометрии, но и в строительном д архитектуре, конструировании и многих других сферах человеческо деятельности.

поскольку каждый отрезок лежит в некоторой плоскости (согласно аксиоме 3), а в каждой плоскости справедливы аксиомы планиметрии (аксиома 1). Как и в планиметрии, длина отрезка AB в пространстве называется также расстоянием между точками A и B.

Подробнее об измерении отрезков в пространстве рассказано в приложении «Система аксиом геометрии» (с. 236). Отметим, что из принятых аксиом следует, что признаки равенства и подобия треугольников справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях.

2 Перпендикуляр к плоскости

Рассмотрим прямую a, пересекающую плоскость α в некоторой точке A (рис. 7). Говорят, что прямая a перпендикулярна к плоскости α, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку A. Прямая a на рисунке 7, *а* перпендикулярна к плоскости α, а на рисунке 7, *б* не перпендикулярна. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой a.

Вокруг нас можно найти много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Так, колонны здания, заводские трубы, подъёмные краны, телеграфные столбы и т. п. перпендикулярны к плоскости земли. На практике правильность установки этих предметов, т. е. их перпендикулярность к плоскости земли, можно проверить при помощи отвеса — небольшого груза, привязанного к верёвке.

Рассмотрим точку A, не лежащую в плоскости α. Отрезок, соединяющий точку A с точкой H плоскости α, называется перпендикуляром, проведённым из точки A к плоскости α, если прямая AH перпендикулярна к плоскости α (рис. 8). Точка H называется основанием перпендикуляра AH. Докажем теорему о перпендикуляре к плоскости.

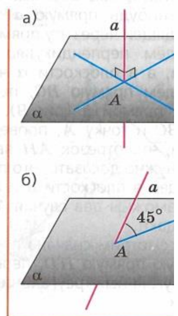
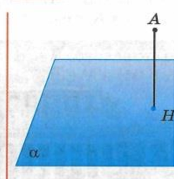


Рис. 7



AH — перпендикуляр к плоскости α

Рис. 8

3 Наклонная к плоскости

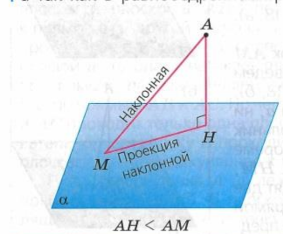
Пусть AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α, M — произвольная точка плоскости α, отличная от H (рис. 15). Отрезок AM называется наклонной, проведённой из точки A к плоскости α, а точка M — основанием наклонной, а отрезок HM — проекцией наклонной. Очевидно, что любая наклонная, проведённая из точки A к плоскости α, больше перпендикуляра, проведённого из точки A к этой плоскости.

ТЕОРЕМА

Если через основание наклонной к плоскости проведена в этой плоскости прямая перпендикулярно к проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна и к самой наклонной; и обратно: если проведённая прямая перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к её проекции.

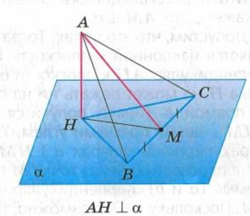
Доказательство. На рисунке 16 отрезки AH и AM — перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки A к плоскости α, а прямая BC проведена в этой плоскости через точку M (основание наклонной), причём точки B и C отмечены на прямой так, что $MB = MC$.

Если прямая BC перпендикулярна к проекции наклонной, т. е. $BC \perp HM$, то прямоугольные треугольники HMB и HMC равны по двум катетам, поэтому $HB = HC$, и, следовательно, прямоугольные треугольники AHB и AHC также равны по двум катетам. Отсюда следует, что $AB = AC$, а так как в равнобедренном треугольнике ABC медиана AM является



$AH < AM$

Рис. 15



$AH \perp \alpha$

Рис. 16

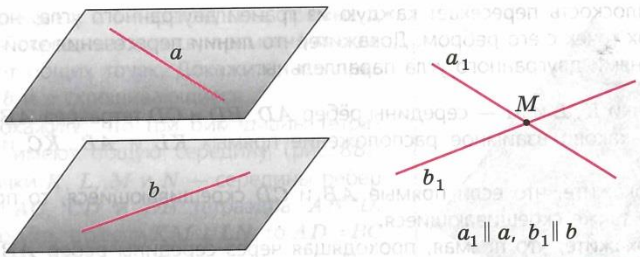


Рис. 85

Введём теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Обратимся к рисунку 85, на котором a и b — данные скрещивающиеся прямые, а M — произвольная точка пространства, через которую проведены прямая a_1, параллельная прямой a, и прямая b_1, параллельная прямой b. Если угол между прямыми a_1 и b_1 равен φ (напомним, что угол φ между пересекающимися прямыми удовлетворяет неравенствам $0 < \varphi \leqslant 90°$, см. п. 6), то будем говорить, что угол между скрещивающимися прямыми a и b равен φ. В частности, если $\varphi = 90°$, то скрещивающиеся прямые называются взаимно перпендикулярными.

Можно доказать, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M, через которую проведены прямые, соответственно параллельные скрещивающимся прямым. С точки зрения наглядности это утверждение достаточно очевидно, а строгое доказательство мы приведём позднее, в п. 51. Отметим также, что при решении задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми нередко удобно взять точку M на одной из скрещивающихся прямых. Например, если на рисунке 85 взять точку M на прямой a, то роль прямой a_1 будет играть сама прямая a.

Вопросы и задачи

17. а) Прямые AB и CD параллельны, прямая AM, не совпадающая с прямой AB, не имеет общих точек с прямой CD. Лежит ли точка M в плоскости ABC? Ответ обоснуйте.

б) Две прямые AB и AC не имеют общих точек с прямой a. Докажите, что хотя бы одна из прямых AB и AC и прямая a являются скрещивающимися.

в) Докажите, что прямые, содержащие противоположные рёбра тетраэдра, являются скрещивающимися.

г) Прямые a и b параллельны, прямые a и c — скрещивающиеся. Могут ли прямые b и c пересекаться?

д)* Прямые AB и A_1B_1 — скрещивающиеся, точки C и D — середины отрезков AB и A_1B_1. Выясните, каково взаимное расположение прямых AA_1 и CD.

и)* Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости ABC.

к)* Прямые a, b и c попарно скрещиваются и не параллельны одной плоскости. Докажите, что существует прямая, пересекающая прямые a и b и параллельная прямой c.

24. а) Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает стороны AC и BC треугольника ABC в точках M и N. Найдите отношение $CN : NB$, если $AM : MC = 3 : 4$.

б) Прямая a параллельна плоскости α, прямая b параллельна прямой a. Докажите, что прямая b либо лежит в плоскости α, либо параллельна плоскости α.

в) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и CD тетраэдра $ABCD$, параллельна прямым BC и AD.

г) Прямые AB и CD параллельны, точка M не лежит в плоскости ABC. Докажите, что линия пересечения плоскостей ABM и CDM параллельна прямой AB.

д) Ребро AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки D до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC и CD, если высота AH треугольника ABC равна 10 см.

е) Изобразите тетраэдр $ABCD$, отметьте точки P и Q — середины рёбер AB и CD и постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой BC.

ж)* Одна из сторон четырёхугольника лежит в плоскости α, а другая, вдвое меньшая первой, параллельна плоскости α и удалена от этой плоскости на 12 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника до плоскости α.

з)* Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, вершина A которого лежит в плоскости α, а сторона BC параллельна этой плоскости и удалена от неё на 3 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости α, если $AB = 5$ см, $BC = 1$ см.

и)* Медианы грани ABD тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке M, а медианы грани BCD пересекаются в точке N. Докажите, что расстояние между прямой MN и плоскостью ABC втрое меньше расстояния от точки D до плоскости ABC.

к)* Прямые a, b и c попарно скрещиваются и параллельны одной плоскости. Докажите, что не существует прямой, пересекающей прямые a и b и параллельной прямой c.

25. а) Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены прямые AE и CF, перпендикулярные к плоскости параллелограмма. Докажите, что плоскости AED и BCF параллельны.

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины трёх боковых рёбер тетраэдра, параллельна плоскости основания.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте аксиомы стереометрии, связанные со взаимным расположением точек, прямых и плоскостей в пространстве.

2. Объясните, что означают слова «две плоскости пересекаются». Что такое линия пересечения двух плоскостей?

3. Докажите, что в пространстве через две точки проходит прямая, и притом только одна.

4. Докажите, что если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

5. Что означают слова «прямая и плоскость пересекаются»?

6. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

7. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

8. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

9. Какая прямая называется перпендикулярной к данной плоскости?

10. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости.

11. Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре к плоскости.

12. Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости, меньше любого другого отрезка, соединяющего эту точку с какой-либо точкой плоскости.

13. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

14. Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из точки к плоскости. Какая точка называется основанием наклонной? Какой отрезок называется проекцией наклонной?

15. Сформулируйте и докажите теорему о трёх перпендикулярах.

16. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

17. Докажите, что через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

18*. Докажите, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, лежат в одной плоскости.

57. Докажите, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

58. Докажите, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

59. Докажите, что если через каждую из скрещивающихся прямых проведена плоскость, параллельная другой прямой, то эти плоскости параллельны.

60. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то любая прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β.

61. Докажите, что если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

62. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

63. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то перпендикуляр, проведённый из произвольной точки плоскости α к плоскости β, перпендикулярен и к плоскости α.

64. Докажите, что все точки одной из двух параллельных плоскостей равноудалены от другой плоскости.

65. Докажите, что если плоскости α и β параллельны, то все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α, на каком точки плоскости α находятся от плоскости β. Что называется расстоянием между двумя параллельными плоскостями?

66. Объясните, какая фигура называется прямоугольным параллелепипедом. Что такое грани, рёбра, противоположные вершины и диагональ прямоугольного параллелепипеда? Сколько граней, рёбер, вершин и диагоналей имеет параллелепипед?

67. Какие грани прямоугольного параллелепипеда называются смежными? Каким свойством обладают смежные грани прямоугольного параллелепипеда?

68. Какие грани прямоугольного параллелепипеда называются противоположными? Каким свойством обладают противоположные грани прямоугольного параллелепипеда?

69. Объясните, что такое основания, боковые грани и боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда. Каким свойством обладают боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда?

70. Объясните, что такое измерения прямоугольного параллелепипеда. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

71. Какой прямоугольный параллелепипед называется кубом? Что представляют собой грани куба?

72. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

73*. Докажите, что на скрещивающихся прямых имеются такие две точки (по одной на каждой прямой), расстояние между которыми равно расстоянию между этими прямыми.

74. Объясните, какой отрезок называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым. Как связана его длина с расстоянием между скрещивающимися прямыми?

2

75*. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно наименьшему расстоянию между двумя точками этих прямых.

76. Объясните, что называется углом между скрещивающимися прямыми.

Дополнительные задачи

§ 1

31. Докажите, что если любые четыре из данных нескольких точек лежат в одной плоскости, то все данные точки лежат в одной плоскости.

32. В пространстве дано несколько прямых, любые две из которых пересекаются. Докажите, что: а) если все точки пересечения различны, то эти прямые лежат в одной плоскости; б) если нет такой точки, через которую проходят все прямые, то они лежат в одной плоскости.

33. Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α, Φ — произвольное множество точек плоскости α. а) Докажите, что если точка M из множества Φ является ближайшей к точке A, то точка M является ближайшей и к точке H, и обратно. б) Проведите доказательство теоремы о трёх перпендикулярах, основанное на утверждении задачи а.

34. Найдите множество оснований перпендикуляров, проведённых из точки A ко всем прямым, лежащим в плоскости α, не содержащей точку A, и проходящим через точку B.

35. Докажите, что множеством оснований наклонных одной и той же длины, проведённых из данной точки к данной плоскости, является окружность, центром которой служит основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к той же плоскости.

36. Три прямые OA, OB и OC лежат в плоскости α, а точка D не лежит в этой плоскости, причём $\angle DOA = \angle DOB = \angle DOC$. Докажите, что прямая OD перпендикулярна к плоскости α.

37. Отрезки MH и MA — перпендикуляр и наклонная, проведённые из точки M к плоскости α, точка B лежит в плоскости α, но не лежит на прямой AH. Докажите, что $\angle MAH < \angle MAB$.

38. Каждая из шести плоскостей проходит через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра. На сколько частей эти плоскости разделяют тетраэдр?

39. Точки M, N и K являются точками пересечения медиан боковых граней тетраэдра. Найдите площадь треугольника MNK, если площадь основания тетраэдра равна 36 см^2.

40. Точки пересечения медиан граней данного тетраэдра соединены отрезками. Докажите, что каждое ребро получившегося тетраэдра в 3 раза меньше соответствующего ребра данного тетраэдра.

2

41. а) Докажите, что все грани тетраэдра равны друг другу (такой тетраэдр называется равногранным) тогда и только тогда, когда противоположные рёбра тетраэдра равны друг другу.
б) Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда сумма трёх плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна 180°.

42. Все боковые грани тетраэдра $ABCD$ — равные равнобедренные треугольники с углом при основании 80°. На боковых рёбрах DB и DC отмечены точки P и Q. Докажите, что периметр треугольника APQ не меньше длины бокового ребра.

43. Все плоские углы при вершине O тетраэдра $OABC$ — прямые. Найдите множество всех точек этого тетраэдра, каждая из которых равноудалена от вершин A и O.

44. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ — прямые, отрезок DH — высота тетраэдра. Докажите, что точка H является ортоцентром треугольника ABC.

45. Докажите, что множество всех точек, лежащих внутри тетраэдра $OABC$ или на его гранях и равноудалённых от плоскостей OAB, OBC и OCA, представляет собой отрезок (он называется биссектрисой тетраэдра).

46. Докажите, что четыре биссектрисы тетраэдра пересекаются в одной точке.

47. Найдите косинус двугранного угла тетраэдра, все рёбра которого равны друг другу.

48. Плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые. Докажите, что

$$S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{CAD}.$$

Задачи повышенной трудности

Глава 1

188. На одной грани двугранного угла отмечена точка A, на другой — точка B. Докажите, что прямая AB образует равные углы с плоскостями граней тогда и только тогда, когда точки A и B равноудалены от ребра этого двугранного угла.

189. Из точки A проведены перпендикуляр AH и наклонные AM и AN к плоскости. Может ли угол MAN быть больше угла MHN?

190. Через центр каждой окружности, описанной около грани тетраэдра, проведена прямая, перпендикулярная к плоскости грани. Докажите, что эти четыре прямые имеют общую точку.

191. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ и $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha \sin\beta$.

192. Все плоские углы при одной вершине тетраэдра — прямые. Докажите, что бимедианы тетраэдра равны друг другу.

193. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ — прямые. Докажите, что если $DA = DB + DC$, то сумма плоских углов при вершине A равна 90°, и обратно: если сумма плоских углов при вершине A равна 90°, то $DA = DB + DC$.

194. Докажите, что для данного треугольника существует плоскость, параллельная проекция на которую этого треугольника является равносторонним треугольником.

195. Докажите, что для данной трапеции существует плоскость, параллельная проекция на которую этой трапеции является равнобедренной трапецией.

196. Пользуясь свойствами параллельного проектирования, приведите ещё одно доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника.

197. Дана проекция треугольника на плоскость. Прямые, содержащие стороны проекции треугольника, разделяют плоскость на семь частей (рис. 213). а) Внутри областей с какими номерами не может лежать проекция центра окружности, описанной около проектируемого треугольника? б) Дана точка M, которая является проекцией центра окружности, описанной около проектируемого треугольника; постройте проекцию ортоцентра этого треугольника.

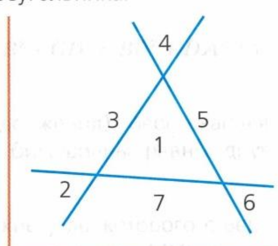


Рис. 213

255. В пространстве даны точки A, B, C и D, не лежащие на одной прямой, причём $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$. Докажите, что эти точки являются вершинами параллелограмма.

256. Докажите, что касательная плоскость к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в точке с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ задаётся уравнением $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$.

257. Найдите множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на двух скрещивающихся взаимно перпендикулярных прямых.

258. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до одной из прямых AA_1, B_1C_1, CD не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

259. Точки M и N — середины сторон BC и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$, стороны AB и CD которого равны. Докажите, что угол между прямыми MN и AB равен углу между прямыми MN и CD.

260. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; б) если $AB \perp CD$ и $AC \perp DB$, то $AD \perp BC$.

261. Каково наибольшее число лучей в пространстве с общим началом, образующих попарно тупые углы?

262. Докажите, что в пространстве нельзя выбрать более шести векторов, все углы между которыми не острые.

263. Две пересекающиеся прямые перпендикулярны. Докажите, что последовательное выполнение двух симметрий относительно этих прямых является симметрией относительно прямой, перпендикулярной к этим прямым.

264. Через каждое ребро тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему данную точку N с серединой противоположного ребра тетраэдра. Докажите, что все шесть таких плоскостей имеют общую точку.

265. Точка O лежит на оси цилиндра и равноудалена от его оснований. Отрезок AB — диаметр одного из оснований, точка C лежит на окружности другого основания и не лежит в плоскости AOB. Докажите, что сумма двугранных углов трёхгранного угла $OABC$ равна 360°.

266. Докажите, что тетраэдр не имеет центра симметрии.

267. а) Докажите, что если тетраэдр имеет ось симметрии, то существует прямая, проходящая через середины двух его противоположных рёбер и перпендикулярная к ним. б) Докажите, что если тетраэдр имеет две оси симметрии, то два его противоположных ребра равны, а прямая, проходящая через середины этих рёбер, перпендикулярна к ним. в) Докажите, что если тетраэдр имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

Задачи для подготовки к ЕГЭ

В3

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 217).

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 218).

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 219).

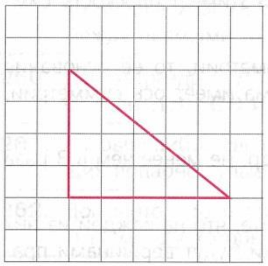


Рис. 217

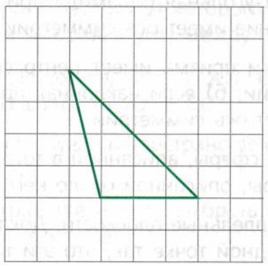


Рис. 218

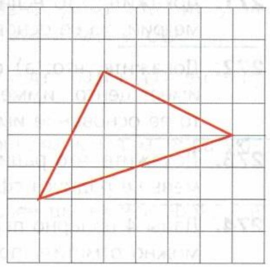


Рис. 219

4. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 220).

5. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 221).

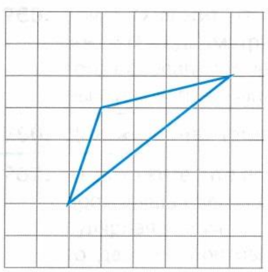


Рис. 220

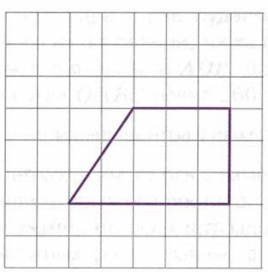


Рис. 221

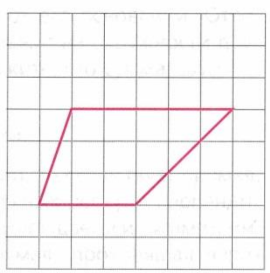


Рис. 222

37. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

38. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

В6

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\sin B$, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

2. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите AC, если $BC = 6$ и $\operatorname{tg} A = 0{,}5$.

3. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите высоту CH, если $AB = 13$ и $\operatorname{tg} A = 0{,}2$.

4. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 9,6. Найдите AC, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

5. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 40. Найдите $\sin A$, если $AC = 25$.

6. В треугольнике ABC угол C прямой, высота CH равна 7. Найдите $\cos A$, если $BH = 24$.

7. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите косинус внешнего угла при вершине B, если $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$.

8. В параллелограмме $ABCD$ $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\sin B$.

9. Основания равнобедренной трапеции равны 31 и 45, а боковая сторона равна 25. Найдите синус острого угла трапеции.

10. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12, а синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

11. Найдите синус угла AOB (рис. 227). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{5}$.

12. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

13. В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса, угол C равен 30°, угол BAD равен 18°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.

14. Углы A и B треугольника ABC равны 58° и 72°, высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите величину угла A_1OB_1. Ответ дайте в градусах.

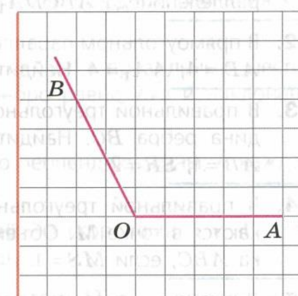


Рис. 227

15. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.

16. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 20°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

17. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

18. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

19. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите её среднюю линию.

20. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

21. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 54°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

22. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

23. Найдите диаметр окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.

24. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите угол BOC, если угол BAC равен 23°.

25. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

B9

1. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=8$ и $AA_1=5$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=4$. Найдите угол C_1BC. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S точка R — середина ребра BC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB=1$, $SR=2$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Объём пирамиды равен 1. Найдите площадь треугольника ABC, если $MS=1$.

5. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, высота пирамиды равна 4. Найдите длину бокового ребра.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 23. Найдите расстояние между точками D и F_1.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 49. Найдите угол E_1EA_1. Ответ дайте в градусах.

8. Высота конуса равна 4, а диаметр основания равен 6. Найдите образующую конуса.

9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания равен 1. Найдите высоту цилиндра.

B11

1. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

2. Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объём.

3. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 60, а площадь одной из его граней равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное к этой грани.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

5. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 5. Найдите объём призмы.

6. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

7. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$.

8. Найдите объём призмы, основанием которой является правильный шестиугольник со стороной, равной 2, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$ и наклонено к плоскости основания под углом в 30°.

9. Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, и каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

10. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4, а её объём равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

11. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12, а объём пирамиды равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.

12. Найдите объём пирамиды, вершинами которой являются вершины A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $AD=3$ и $AA_1=4$.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а каждая из трёх других боковых граней наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.

14. Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите диаметр сферы.

15. Объём первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

16. Высота конуса равна 6, а образующая равна 10. Найдите отношение объёма конуса к числу π.

17. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите отношение объёма конуса к числу π.

18. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 2 раза?

19. Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см^2. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра.

20. Площадь боковой поверхности конуса равна 16 см^2. Радиус основания конуса уменьшили в 4 раза, а образующую увеличили в 2 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса.

C2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите косинус угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=12$, $AD=8$ и $AA_1=5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно к прямой AK, где K — середина ребра C_1D_1.

18. В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB=AC=DB=DC=10$, $BC=DA=12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

19. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

22. Диаметр основания цилиндра равен 20, а образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

C4

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC=\alpha$. Найдите все медианы этого треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне BC взята точка D так, что $BD:DC=1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

3. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к боковой стороне.

4. Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH=AB$. Найдите угол ACB.

6. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, точка O — центр вписанной в треугольник окружности. Известно, что $BC=24$, $MN=12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

7. Точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

8. Углы A и C треугольника ABC равны 45° и 60°, отрезки AM, BN и CK — высоты треугольника. Найдите отношение $\frac{MN}{KN}$.

9. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}=\frac{1}{2}$. Найдите отношение $\frac{BC}{AB}$.

Задачи с практическим содержанием

Глава 1

1. Можно ли из прямолинейных реек изготовить звезду, изображённую на рисунке (рис. 228)?

2. Ученик изобразил тетраэдр, в котором проведено сечение (рис. 229). Правилен ли его чертёж?

3. Как с помощью линейки измерить диагональ кирпича, если есть несколько одинаковых кирпичей? (Требуется непосредственно измерить диагональ, а не вычислить её, измерив длину, ширину и высоту.)

4. Можно ли куб с ребром 10 см завернуть в квадратный платок со стороной 30 см?

5. По четырём дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, с постоянными скоростями идут 4 пешехода. Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвёртым, а второй — с третьим и четвёртым. Докажите, что третий пешеход встретился с четвёртым.

6. Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

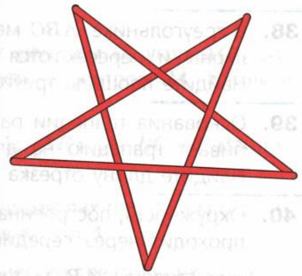


Рис. 228

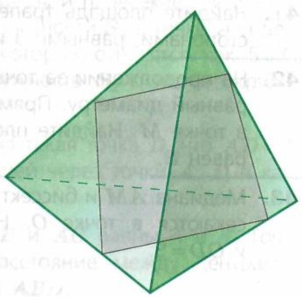


Рис. 229

Глава 2

1. Три свинцовых куба, рёбра которых равны 3 см, 4 см и 5 см, расплавили и изготовили из них один куб. Найдите его ребро.

2. Кирпич размером 25 см × 12 см × 6,5 см весит 3,51 кг. Найдите его плотность в граммах на кубический сантиметр.

3. Сечение железнодорожной насыпи, перпендикулярное к рельсам, имеет вид трапеции с нижним основанием 12 м, верхним основанием 6 м и высотой 2 м. Найдите объём 10-метрового участка насыпи.

4. Сечение реки, перпендикулярное к течению реки, представляет собой трапецию с основаниями 20 м и 16 м и высотой 2 м. Скорость течения воды в реке 2 м/с. Сколько кубических метров воды проходит через это сечение за 1 мин?

15. Полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого равна 3 см, плавает в воде, причём из воды выступает половина шара. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар (плотность воды равна 1 г/см^3).

16. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

17. Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным 6370 км.)

18. Сколько кожи пойдёт на покрышку футбольного мяча радиусом 11 см? (На швы добавить 8% от площади поверхности мяча.)

19. Сколько килограммов краски нужно, чтобы покрасить купол, имеющий форму полушара с диаметром 4 м, если на 1 м^2 требуется 150 г краски?

20. Человек прошёл километр на север, затем километр на запад и километр на юг. Мог ли он при этом вернуться в исходное положение?

21. Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 1 м 20 см и высотой 80 см?

22. При каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной ёмкости будет наименьшим? Другими словами, найдите размеры цилиндра данного объёма V, площадь поверхности которого наименьшая.

Глава 4

1. Почему, когда мы смотрим в зеркало, правое и левое меняются местами, а верх и низ нет? А что произойдет, если мы встанем на зеркальный пол?

2. Основание ABC тетраэдра $OABC$ прозрачное, а все остальные грани зеркальные. Все плоские углы при вершине O прямые. Докажите, что луч света, вошедший в тетраэдр через основание ABC под произвольным углом к нему, отразившись от граней, выйдет в противоположном направлении по отношению к входящему лучу. (На этом свойстве основано устройство уголкового отражателя, используемого для точного измерения расстояний.)

3. Вырежите из прямоугольного листа бумаги фигуру, изображённую на рисунке 230. (Клеем пользоваться нельзя.)

Рис. 230

Исследовательские задачи

1. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
   а) противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны;
   б) основанием одной из высот тетраэдра является ортоцентр грани (при этом таким же свойством обладают и три другие высоты тетраэдра);
   в) три бимедианы тетраэдра равны друг другу;
   г) суммы квадратов противоположных рёбер тетраэдра равны;
   д) произведения косинусов противоположных двугранных углов тетраэдра равны.

2. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
   а) противоположные рёбра тетраэдра равны;
   б) сумма плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна 180°;
   в) бимедианы тетраэдра попарно перпендикулярны;
   г) бимедианы тетраэдра являются общими перпендикулярами прямых, содержащих противоположные рёбра тетраэдра;
   д) центры вписанной и описанной сфер тетраэдра совпадают;
   е) центр описанной сферы и центр масс (т. е. точка пересечения медиан) тетраэдра совпадают;
   ж) центр вписанной сферы и центр масс тетраэдра совпадают;
   з) четыре медианы тетраэдра равны друг другу;
   и) четыре высоты тетраэдра равны друг другу;
   к) грани тетраэдра равновелики.

3. Тетраэдр называется каркасным, если существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра.
   Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
   а) суммы длин противоположных рёбер тетраэдра равны;
   б) суммы двугранных углов при противоположных рёбрах тетраэдра равны;
   в) окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются друг друга (это означает, что каждые две окружности, вписанные в грани тетраэдра с общим ребром, касаются этого ребра в одной и той же точке);
   г) все четырёхугольники, получающиеся на развёртке тетраэдра, являются описанными;
   д) четыре прямые, каждая из которых проходит через центр вписанной в грань тетраэдра окружности и перпендикулярна к этой грани, пересекаются в одной точке.

4. Найдите число попарно неравных друг другу равносторонних треугольников, все вершины которых принадлежат окружностям оснований цилиндра радиуса R с высотой h.

5. Исследуйте, сколько различных точек может быть среди тех 12 точек, через которые проходит сфера Эйлера.

Темы рефератов и докладов

1. Об аксиомах геометрии.
2. Ортоцентрический тетраэдр и его свойства.
3. Равногранный тетраэдр и его свойства.
4. Каркасный тетраэдр и его свойства.
5. Теоремы синусов и косинусов для трёхгранного угла.
6. Правильные многогранники и элементы их симметрии.
7. Полуправильные многогранники.
8. Метод проекций в задачах на сечения многогранников.
9. Сечения цилиндрической и конической поверхностей (эллипс, гипербола, парабола).
10. Прямая и сфера Эйлера.
11. Применение геометрических преобразований при решении задач.
12. Сферическая геометрия.

Историческая справка

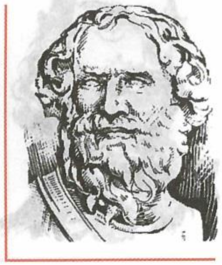
Сначала мы расскажем об истории собственно стереометрии, а затем об истории некоторых областей современной геометрии.

Стереометрия. Изучение стереометрии началось почти одновременно с изучением планиметрии. Вычислением объёмов занимались ещё в Древнем Египте, Вавилонии и Древнем Китае. Трактат «Начала», в котором Евклид (около 325—265 гг. до н. э.) изложил древнегреческую геометрию, включает не только планиметрию, но и стереометрию. Ей посвящены три последние книги «Начал»: 11-я (общие сведения), 12-я (объём пирамиды и шара) и 13-я (правильные многогранники).


Евклид

Вычисление объёма пирамиды вызывало трудности, потому что требовало применения перехода к пределу в том или ином виде. Для вычисления объёма пирамиды Евдокс Книдский разработал специальный метод, впоследствии получивший название метода исчерпывания. Труды самого Евдокса не сохранились, но его результаты детально изложены в «Началах» Евклида.

Архимед (287—212 гг. до н. э.) первым вычислил объём шара. Для этого он доказал, что объём цилиндра, описанного вокруг шара, в полтора раза больше объёма шара. Тем самым вычисление объёма шара сводилось к вычислению объёма цилиндра, а вычислять объём цилиндра в то время уже умели. Архимед считал эту теорему о шаре и цилиндре одним из важнейших своих достижений и даже завещал установить на его надгробии цилиндр и шар; по этому знаку впоследствии Цицерон нашёл на Сицилии заброшенную и заросшую терновником могилу Архимеда. Архимед обнаружил также 13 полуправильных многогранников, грани которых правильные, но не обязательно равные многоугольники. Четырнадцатый полуправильный многогранник был обнаружен лишь в 1957 г. российским математиком В. Г. Ашкинузи.


Архимед

Координаты первыми стали использовать Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665). Они ввели координаты на плоскости, а о возможности ввести координаты в пространстве они лишь упоминали. Первым ввёл и применил координаты в пространстве Алексис Клод Клеро.


Рене Декарт

Основные исследования Декарта по геометрии связаны с методом координат. Но он занимался также изучением выпуклых многогранников и установил в 1620 г., что число вершин В, число рёбер Р и число граней Г связаны соотношением В − Р + Г = 2. Записки Декарта, содержащие этот результат, были опубликованы лишь в 1860 г. В 1758 г., когда эту формулу снова открыл Леонард Эйлер (1707—1783), об исследованиях многогранников Декартом известно не было, и эту формулу стали называть формулой Эйлера.

Понятие вектора в математику и физику ввёл ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865), хотя некоторое представление о векторах задолго до него имели Галилей и Ньютон. Гамильтон определял векторы с помощью координат.


Пьер Ферма

Конические сечения. Изучение свойств сечений конуса началось ещё в Древней Греции. Первоначально они определялись как сечения конической поверхности плоскостью, перпендикулярной к образующей. Эллипс, парабола и гипербола получаются соответственно для конуса с остроугольным осевым сечением, прямоугольным и тупоугольным. Затем Аполлоний Пергский (3—2 вв. до н. э.) доказал, что любое сечение конической поверхности является эллипсом, параболой или гиперболой. Он также детально изучил свойства этих кривых. Впоследствии Кеплер обнаружил, что планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, а Ньютон вывел это свойство орбит планет из предложенного им закона гравитации: притяжение двух материальных точек пропорционально произведению их масс, делённому на квадрат расстояния между ними.


Леонард Эйлер

Геометрия поверхностей в пространстве. Для точек поверхности, расположенной в пространстве, можно определить расстояние между точками как наименьшую длину кривой, проходящей по поверхности и соединяющей эти точки. Внутренняя геометрия поверхностей изучает те свойства, которые можно выразить через эти расстояния; название «внутренняя геометрия поверхностей» связано с тем, что такие свойства сохраняются при изгибании поверхности. Очень интересная геометрия получается в случае, когда поверхность — сфера; она

Основные формулы планиметрии

Треугольник

a, b, c — длины сторон

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр

h_a — высота треугольника

S — площадь треугольника

r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей

Неравенство треугольника: $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$

Сумма углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Формулы площади треугольника:

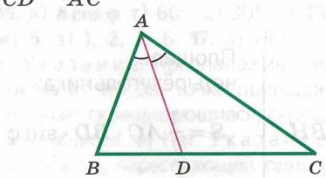
$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{abc}{4R} = pr =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

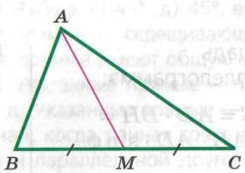
AD — биссектриса треугольника

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC};\ AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$



AM — медиана треугольника

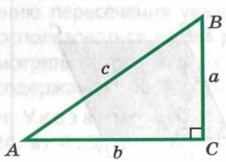
$$AM^2 = \frac{1}{4}(2AC^2 + 2AB^2 - 2BC^2)$$



Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

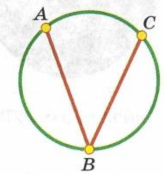
$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$



Окружность

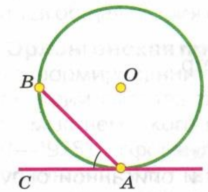
Вписанный угол:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$$



Угол между касательной и хордой:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile AB$$

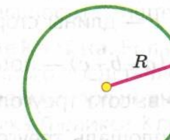


Длина окружности:

$$l = 2\pi R$$

Площадь круга:

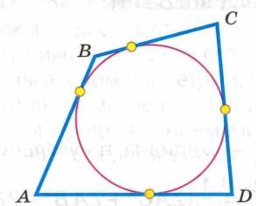
$$S = \pi R^2$$



Четырёхугольники

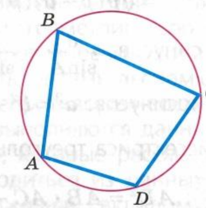
Свойство описанного четырёхугольника:

$$AB + CD = AD + BC$$



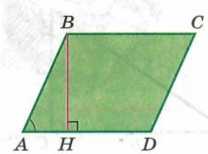
Свойство вписанного четырёхугольника:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$$



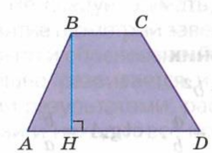
Площадь параллелограмма:

$$S = AD \cdot BH = AB \cdot AD \cdot \sin\varphi$$



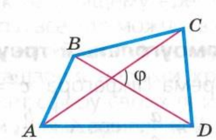
Площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$



Площадь четырёхугольника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$$



Список литературы

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 2. Стереометрия / Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1952.
2. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 4. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Александров П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 5. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Наука, 1966.
4. Атанасян Л. С. Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 2013.
5. Гельфанд И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. — М.: МЦНМО, 2009.
6. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. Т. 2. Геометрия / Ф. Клейн. — М.: Наука, 1987.
7. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Коксетер. — М.: Наука, 1966.
8. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.
9. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1989.
10. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. — М.: Астрель, АСТ, 2001.

Интернет-ресурсы

1. http://ilib.mirror1.mccme.ru/
2. http://window.edu.ru/window/library
3. http://www.problems.ru/
4. http://kvant.mirror1.mccme.ru/
5. http://www.etudes.ru/

Интернет-ресурсы на английском языке

1. http://mathworld.wolfram.com/
2. http://forumgeom.fau.edu/

дикуляров, проведённых из точек M и A к плоскости BCD, равно $\frac{MA_1}{DA}$. Следовательно, объём тетраэдра $MBCD$ равен $\frac{MA_1}{DA}V$, где V — объём тетраэдра $ABCD$. Аналогично доказывается, что объёмы тетраэдров $MACD$ и $MABD$ равны $\frac{MB_1}{DB}V$ и $\frac{MC_1}{DC}V$.

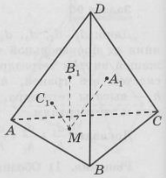


Рис. 96

2) Тетраэдр $ABCD$ составлен из трёх тетраэдров $MBCD$, $MACD$ и $MABD$, поэтому его объём равен сумме объёмов этих тетраэдров:

$$V = \frac{MA_1}{DA}V + \frac{MB_1}{DB}V + \frac{MC_1}{DC}V.$$

Сокращая обе части этого равенства на V, получаем требуемое равенство.

§ 4. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

24. Трёхгранный угол

25. Многогранный угол

Назначение пунктов: ввести понятия трёхгранного и многогранного углов и их элементов, рассмотреть два утверждения о свойствах плоских углов трёхгранного угла и теорему о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла; в классах с углублённым изучением математики изучить доказательства этих утверждений и можно ознакомиться также с теоремами косинусов и синусов для трёхгранного угла.

Комментарии к теоретическому материалу

Введя понятие трёхгранного угла и его элементов (вершина, рёбра, грани, двугранные углы), следует обратить внимание учащихся на то, что в обозначении $OABC$ трёхгранного угла на первом месте стоит буква O, обозначаю-

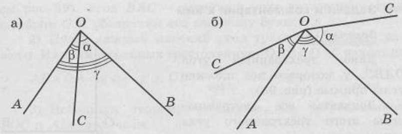


Рис. 97

щая его вершину (в отличие от обозначения AOB плоского угла, где буква O, обозначающая вершину угла, стоит между буквами A и B).

Изучение утверждения о том, что сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360°, не является обязательным для базового уровня. Вместе с тем можно предложить всем учащимся обосновать это утверждение на основе наглядных представлений, сделав такую подсказку: разрежьте трёхгранный угол $OABC$ по ребру OC (рис. 97, *а*), а затем поверните плоские углы BOC и COA вокруг рёбер OB и OA так, чтобы они оказались в плоскости AOB (рис. 97, *б*). Рисунок 97, *б* наглядно свидетельствует о том, что $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

Второе утверждение о плоских углах (каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов) также можно предложить учащимся доказать самостоятельно, используя воспроизведённый на доске рисунок 109 учебника и подсказку учителя: воспользуйтесь первым утверждением применительно к трёхгранному углу OA_1BC (см. рис. 109 учебника).

Теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла не являются обязательными даже для классов с углублённым изучением математики. Можно предложить изучить их самостоятельно наиболее сильным учащимся.

При рассмотрении теоремы о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла в классах с базовым уровнем изучения математики снова можно воспользоваться тем наглядным приёмом, который описан выше для трёхгранного угла.

Задачи и комментарии к ним

Задача 71а

Дано: трёхгранный угол $OABC$, у которого все плоские углы прямые (рис. 98).

Доказать: все двугранные углы этого трёхгранного угла также прямые.

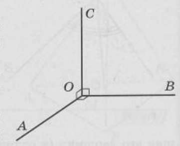


Рис. 98

Решение. По условию $OB\perp OA$ и $OC\perp OA$, поэтому угол BOC — линейный угол двугранного угла с ребром OA. Так как $\angle BOC = 90°$ (по условию), то двугранный угол с ребром OA прямой. Аналогично доказывается, что двугранные углы с рёбрами OB и OC также прямые.

Комментарий. Другой способ решения задачи связан с теоремой косинусов для трёхгранного угла. По теореме косинусов

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A. \qquad (1)$$

По условию $\alpha=\beta=\gamma=90°$, поэтому из равенства (1) следует, что $\cos A=0$, т. е. $\angle A=90°$. Таким образом, двугранный угол с ребром OA данного трёхгранного угла равен 90°, т. е. этот двугранный угол прямой. Аналогично можно доказать, что и остальные двугранные углы трёхгранного угла $OABC$ прямые.

Задача 71в*

Дано: трёхгранный угол, у которого все плоские углы острые и равны друг другу (рис. 99).

Доказать: все двугранные углы данного трёхгранного угла также равны друг другу.

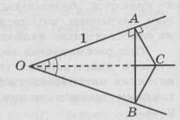


Рис. 99

Решение. 1) Отметим на одном из рёбер точку A так, что $OA=1$, и проведём в плоскостях граней, содержащих ребро OA, прямые AB и AC, перпендикулярные к OA (точки B и C лежат на рёбрах двугранного угла,

см. рис. 99). Угол BAC — линейный угол двугранного угла с ребром OA, обозначим его величину буквой A.

2) Пусть каждый плоский угол трёхгранного угла равен α. Из прямоугольных треугольников OAB и OAC находим:

$$AB=OA\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha,\ OB=\frac{1}{\cos\alpha},\ AC=\operatorname{tg}\alpha,\ OC=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

3) Используя теорему косинусов, из треугольников BOC и ABC получаем

$$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cdot\cos\alpha=\frac{2}{\cos^2\alpha}-\frac{2}{\cos\alpha}=\frac{2(1-\cos\alpha)}{\cos^2\alpha},$$

$$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{2(1-\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}}{2\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

4) Проведя аналогичные построения и вычисления, для косинусов двугранных углов с рёбрами OB и OC получим такие же выражения, как выражение (2) для $\cos A$. Таким образом, $\cos A=\cos B=\cos C$, откуда следует, что $\angle A=\angle B=\angle C$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Учащиеся, знакомые с теоремой косинусов для трёхгранного угла, могут получить выражение (2) для $\cos A$ проще. Так как в нашем случае $\alpha=\beta=\gamma$, то из формулы (1) находим: $\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. Ясно, что в точности такие же выражения получатся для $\cos B$ и для $\cos C$, поэтому $\angle A=\angle B=\angle C$.

Задача 71г*

Дано: трёхгранный угол $OABC$, двугранный угол с ребром OC — прямой, углы AOB и BOC — острые, $\angle AOB=\gamma$, $\angle BOC=\alpha$, двугранный угол с ребром OB равен B (рис. 100).

Выразить: $\operatorname{tg}\gamma$ через углы α и B.

Решение. 1) Проведём $AH\perp OC$ и $AK\perp OB$ (см. рис. 100). Так как плоскости AOC и BOC перпендикулярны (по условию), то $AH\perp BOC$ и, следовательно, $\angle AHK=90°$. Кроме того, $HK\perp OB$ (по теореме о трёх перпендикулярах), поэтому $\angle AKH=B$ (линейный угол двугранного угла с ребром OB).

2) Из прямоугольных треугольников AHK, AKO и HKO получаем

$$HK=AK\cdot\cos B,\ OK=\frac{AK}{\operatorname{tg}\gamma},$$

$$HK=OK\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

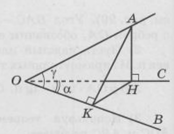


Рис. 100

3) Из двух последних равенств следует, что

$$HK=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}\cdot AK.$$

Приравнивая два выражения для HK и сокращая на AK, приходим к равенству $\cos B=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}$, откуда получаем

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos B}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos B}$.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 24 и 25 учащиеся должны уметь объяснить, какая фигура называется трёхгранным углом и какая — многогранным углом, знать названия элементов многогранных углов и уметь показывать их на рисунках и моделях; формулировать (а в классах с углублённым изучением математики и доказывать) утверждения о свойствах плоских углов трёхгранного угла и выпуклого многогранного угла; уметь решать задачи такого типа, как в заданиях 71 и 72.

Дополнительные задачи к § 4

Задача 92

Дано: трёхгранный угол и три плоскости, каждая из которых проходит через одно из его рёбер и биссектрису противолежащего плоского угла.

Доказать: эти три плоскости имеют общую прямую.

Решение. 1) Отложим на рёбрах данного трёхгранного угла с вершиной O равные отрезки OA, OB и OC (рис. 101). Пусть A_1 — середина отрезка BC. Тогда луч OA_1 — биссектриса плоского угла BOC, поэтому плоскость OAA_1 — это

одна из данных плоскостей. Две другие плоскости — это плоскости OBB_1 и OCC_1, где B_1 и C_1 — середины отрезков CA и AB.

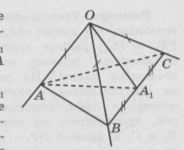


Рис. 101

2) Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M (точке пересечения медиан треугольника ABC), поэтому данные плоскости OAA_1, OBB_1 и OCC_1 имеют общую прямую — прямую OM.

Задача 93

Дано: трёхгранный угол и три полуплоскости, каждая из которых делит пополам один из двугранных углов этого трёхгранного угла.

Доказать: а) эти три полуплоскости имеют общий луч; б) каждая точка этого луча равноудалена от плоскостей граней этого трёхгранного угла.

Решение. а), б) Полуплоскость, делящая пополам двугранный угол, состоит из точек, каждая из которых лежит внутри этого двугранного угла и равноудалена от плоскостей его граней (см. задачи 13ж и 14ж). Две полуплоскости, делящие пополам двугранные углы с рёбрами OA и OB трёхгранного угла $OABC$, пересекаются по лучу с началом O. Этот луч состоит из точек, каждая из которых лежит внутри трёхгранного угла, равноудалена от плоскостей OAB и OAC и равноудалена от плоскостей OAB и OBC. Каждая такая точка равноудалена также и от плоскостей OAC и OBC, т. е. она лежит в полуплоскости, делящей пополам двугранный угол трёхгранного угла $OABC$ с ребром OC. Таким образом, три данные полуплоскости имеют общий луч и каждая точка этого луча равноудалена от плоскостей граней трёхгранного угла $OABC$.

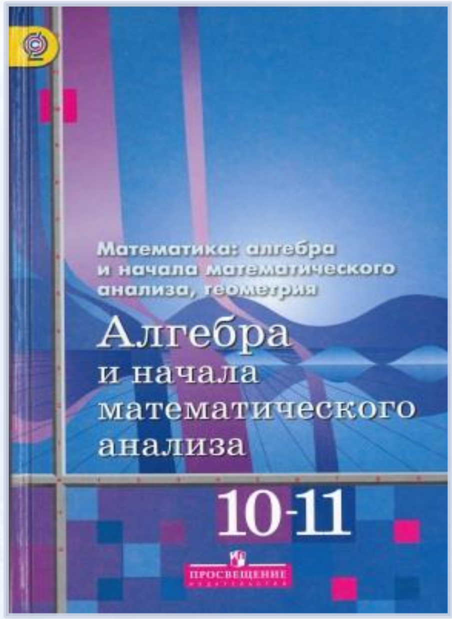
Задача 94

Дано: трёхгранный угол $OABC$, точка P равноудалена от плоскостей его граней, из точки P проведены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 к плоскостям граней.

Доказать: точки A_1, B_1 и C_1 лежат в плоскости, перпендикулярной к прямой OP.

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ш.А. АЛИМОВ



- **Рабочая программа**
- **Учебник**
- **Дидактические материалы**
- **Тематические тесты**
- **Книга для учителя**

Особенности линии УМК «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» Ш. А. Алимова

I глава

Действительные числа

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров

§ 1 Целые и рациональные числа

Изучение математики начинается со знакомства с натуральными числами, т. е. с числами 1, 2, 3, 4, 5, ... При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

Дополнением натуральных чисел нулём и отрицательными числами (т. е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т. е. чисел 0, ±1, ±2, ±3, ... При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

Введение рациональных чисел, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, позволило находить частное любых двух целых чисел при условии, что делитель не равен нулю. Каждое целое число m также является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Задача 1 Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

▶ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Возведём последнее уравнение в квадрат:

$$x^2+7x+6=36, \text{ или } x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-10$.

Проверка показывает, что $x_2=-10$ — посторонний корень.

Ответ $x=3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+12}=x. \quad (1)$$

▶ Возведём уравнение в четвёртую степень:

$$x^2+12=x^4,$$

откуда $x^4-x^2-12=0$. Решим это биквадратное уравнение

$$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}, \text{ т. е. } x^2=4 \text{ или } x^2=-3.$$

Уравнение $x^2=4$ имеет два корня $x=\pm2$. Уравнение $x^2=-3$ не имеет действительных корней. Так как при возведении обеих частей уравнения (1) в четвёртую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x=2$ обе части уравнения (1) равны 2, т. е. $x=2$ — корень уравнения (1). При $x=-2$ левая часть уравнения (1) равна 2, а правая равна −2, т. е. −2 не является корнем уравнения.

Ответ $x=2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-19}=x-1. \quad (2)$$

▶ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда

$$x^3-19=x^3-3x^2+3x-1,$$
$$3x^2-3x-18=0, \quad x^2-x-6=0.$$

Особенности линии УМК «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс» Ш. А. Алимова

17 Вычислить:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}2)^n$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{7^n}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\right)$.

18 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:
1) $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{8}$; 2) $q=\frac{1}{3}$, $b_5=\frac{1}{81}$;
3) $q=-\frac{1}{3}$, $b_1=9$; 4) $q=-\frac{1}{2}$, $b_4=\frac{1}{8}$.

19 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:
1) 6, 1, $\frac{1}{6}$, …; 2) −25, −5, −1, … .

20 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
1) 0,(5); 2) 0,(8); 3) 0,(32); 4) 0,2(5).

21 Выяснить, является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:
1) $b_n=3\cdot(-2)^n$; 2) $b_n=-5\cdot 4^n$;
3) $b_n=8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

22 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:
1) $q=\frac{1}{2}$, $b_5=\frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4=\frac{9}{8}$.

23 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 30. Найти:
1) b_1, если $q=\frac{1}{5}$; 2) q, если $b_1=20$.

24 Вычислить:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2^n}{2^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2}{3^n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5^n+1)^2}{5^{2n}}$.

25 На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 5, *а*). Найти высоту получившейся фигуры.

26 В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 5, *б*). Радиус первой окружности равен R_1. Найти радиусы R_2, R_3, …, R_n, … остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1+2(R_2+R_3+\ldots+R_n+\ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

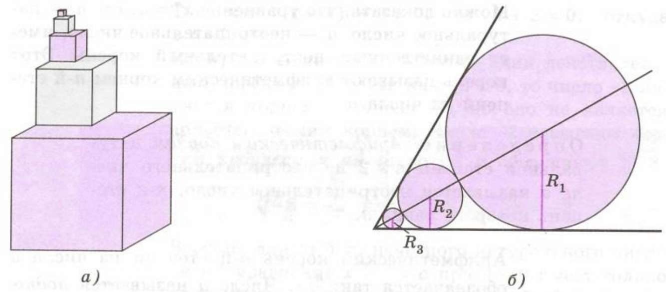


Рис. 5

§ 4 Арифметический корень натуральной степени

Задача 1 Решить уравнение $x^4=81$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^4-81=0$, или $(x^2-9)(x^2+9)=0$.
Так как $x^2+9\neq0$, то $x^2-9=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. ◁

Итак, уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=3$, $x_2=-3$. Их называют корнями четвёртой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$.
Таким образом, $\sqrt[4]{81}=3$.

Линия УМК Л.С. Атанасяна и др.
10 – 11 класс. Базовый и углублённый уровни

- Учебник
- Рабочая тетрадь
- Дидактические материалы
- Пособие «Готовимся к ЕГЭ»
- Пособие для учителей

Начало материала для углубленного уровня (данный материал не обязателен для изучения на базовом уровне)

Глава II

Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

15 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

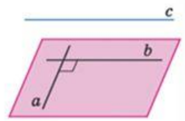


Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

▼ **Доказательство**

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана. △

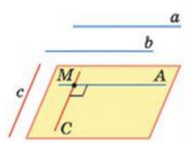


Рис. 44

16 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Определение

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой a.

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

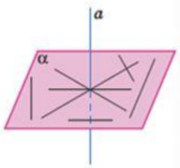


Рис. 45

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

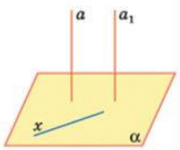


Рис. 46

Теорема

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Окончание материала для углубленного уровня (данный материал не обязателен для изучения на базовом уровне)

Так выделяются важнейшие определения, леммы и свойства в изучаемом курсе

Так выделяются важнейшие теоремы и аксиомы

Вопросы и задачи к пункту – первая ступень задач

Каждая глава завершается вопросами для повторения

Рис. 97

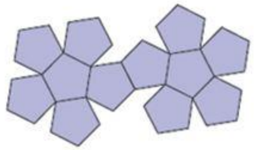


Рис. 98

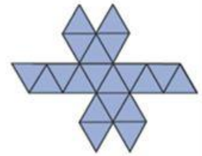


Рис. 99

273 Перерисуйте развертку правильного октаэдра (рис. 97) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее октаэдр.

274 Перерисуйте развертку правильного додекаэдра (рис. 98) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее додекаэдр.

275 Перерисуйте развертку правильного икосаэдра (рис. 99) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее икосаэдр.

Вопросы и задачи

276 Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?

277 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?

278 Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырехугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырехугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

279 Найдите угол между двумя диагоналями граней куба, имеющими общий конец.

280 Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагонали двух его граней.

281 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины D_1 проведены диагонали граней D_1A, D_1C и D_1B_1 и концы их соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1AB_1C — правильный тетраэдр. Найдите отношение площадей поверхностей куба и тетраэдра.

282 Найдите угол между двумя ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину, но не принадлежат одной грани (см. рис. 89).

283 В правильном тетраэдре $DABC$ ребро равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через центр грани ABC: а) параллельно грани BDC; б) перпендикулярно к ребру AD.

284 От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают тетраэдр с ребром 1. Какая фигура получится в результате?

285 Докажите, что в правильном тетраэдре отрезки, соединяющие центры граней, равны друг другу.

286 В правильном тетраэдре h — высота, m — ребро, а n — расстояние между центрами его граней. Выразите: а) m через h; б) n через m.

287 Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между: а) двумя его противоположными вершинами; б) центрами двух смежных граней; в) противоположными гранями.

Вопросы к главе III

1 Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?

2 Призма имеет n граней. Какой многоугольник лежит в ее основании?

3 Является ли призма прямой, если две ее смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?

4 В какой призме боковые ребра параллельны ее высоте?

5 Является ли призма правильной, если все ее ребра равны друг другу?

6 Может ли высота одной из боковых граней наклонной призмы являться и высотой призмы?

7 Существует ли призма, у которой: а) боковое ребро перпендикулярно только одному ребру основания; б) только одна боковая грань перпендикулярна к основанию?

8 Правильная треугольная призма разбивается плоскостью, проходящей через средние линии оснований, на две призмы. Как относятся площади боковых поверхностей этих призм?

9 Будет ли пирамида правильной, если ее боковыми гранями являются правильные треугольники?

10 Сколько граней, перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида?

11 Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

12 Могут ли все грани треугольной пирамиды быть прямоугольными треугольниками?

13 Можно ли из куска проволоки длиной 66 см изготовить каркасную модель правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 10 см?

14 На какие многогранники рассекается треугольная призма плоскостью, проходящей через вершину верхнего основания и противолежащую ей сторону нижнего основания?

Дополнительные задачи

288 Докажите, что число вершин любой призмы четно, а число ребер кратно 3.

289 Докажите, что площадь полной поверхности куба равна $2d^2$, где d — диагональ куба.

290 Угол между диагональю основания прямоугольного параллелепипеда, равной l, и одной из сторон основания равен φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности данного параллелепипеда.

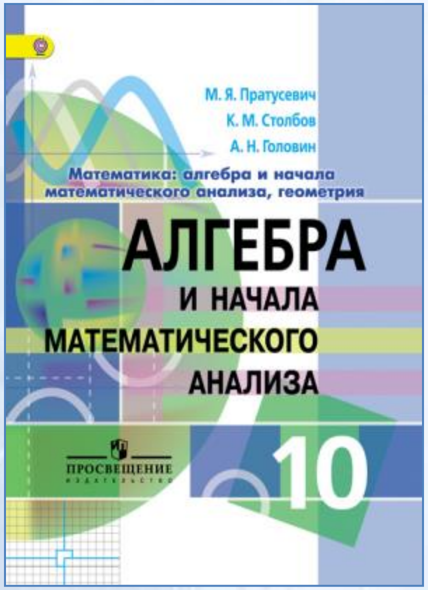
291 В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон основания — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

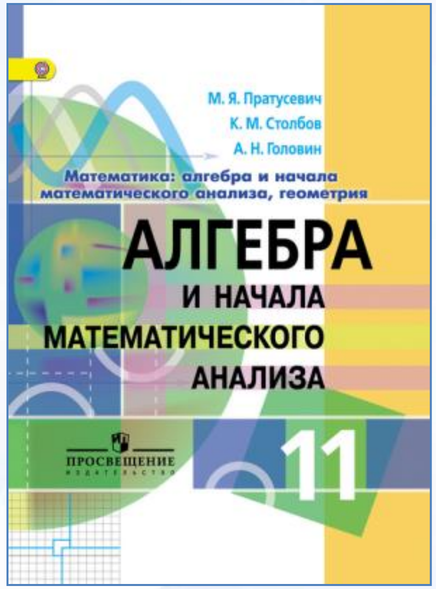
Так обозначаются задачи для углубленного уровня, не являющиеся обязательными для базового уровня

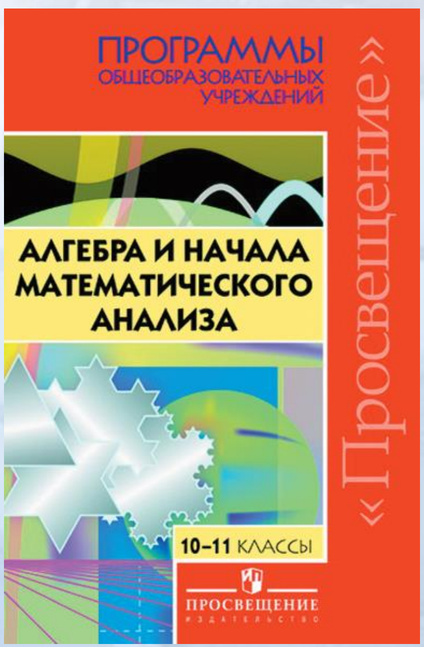
Дополнительные задачи к главе – вторая ступень задач

УМК М.Я. Пратусевича «Алгебра и начала математического анализа» (углублённый уровень)

- **Рабочая программа**
- **Учебник**
- **Дидактические материалы**
- **Книга для учителя**



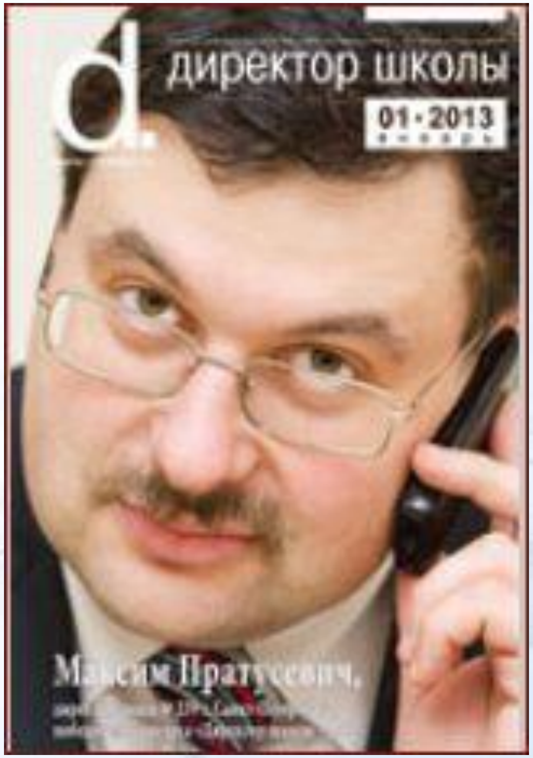


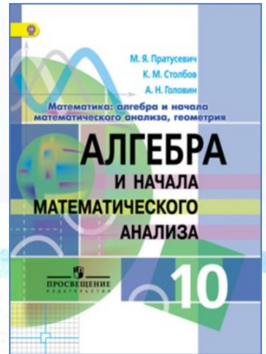


ФГОС

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

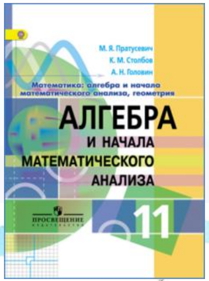
Максим Яковлевич Пратусевич — почетный работник общего образования РФ, кандидат физико-математических наук директор ГБОУ «Физико-математического лицея № 239» Центрального района Санкт-Петербурга





М. Я. Пратусевич
К. М. Столбов
А. Н. Головин
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
АЛГЕБРА
И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА
10
ПРОСВЕЩЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ



ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Основные принципы, лежащие в основе создания УМК

1. Прикладная математика решения задач (в каждом из составляющих комплект учебников – более 1000 задач, а также более 300 примеров решения задач)

2. Общекультурная составляющая математики, в том числе исторические предпосылки и вклад математики в развитие человечества

3. Избыточность содержания как средство удовлетворения познавательной потребности и поддержка элективных курсов

Основные принципы, лежащие в основе создания УМК

4. Создание неформальных представлений о едином уровне строгости

5. Обоснованный исторически подход к введению и изучению новых понятий

6. Превалирование методов, принципов и подходов над частными рецептами

7. Работа над формированием универсальных учебных действий как приоритет подбора материала

8. Эмоциональное окрашенное восприятие материала

Формирование УУД

I. Знаково–символические:

1. Замещение
2. Кодирование/декодирование
3. Моделирование

II. Логические:

1. Анализ объекта с выделением существенных и несущественных признаков
2. Синтез как составление целого из частей, в том числе с восполнением недостающих компонентов
3. Выбор оснований и критериев для сравнения, классификации, сериации объектов
4. Подведение под понятия, выведение следствий
5. Установление причинно-следственных связей
6. Построение логической цепи рассуждения
7. Выдвижение гипотез, их обоснование
8. Доказательство

Возможные элективные курсы с использованием УМК

1. Тайны множеств
2. Основная теорема арифметики и алгоритм Евклида
3. Функции и графики
4. Пределы последовательностей
5. Замечательное число *e*
6. «Французские теоремы» и их следствия
7. Комплексные числа и их применения
8. Уравнения и неравенства повышенной сложности

П.37. Докажите, что дробь $\frac{n^2+1}{4n^2+7}$ несократима ни при каком натуральном n.

П.38. Докажите, что равенство $x^3 + y^3 + z^3 = 12\ 345\ 672\ 007$ не выполнено ни при каких целых x, y, z.

П.39. Докажите, что $ab \vdots 9$, если $a^2 + b^2 \vdots 3$.

П.40. Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел кратна 9.

П.41. Докажите, что при всех целых a и b выполнено $ab(a^2 - b^2) \vdots 3$.

П.42. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не есть точный квадрат.

П.43. Десятизначное число на 1 больше квадрата натурального числа. Докажите, что в нем есть одинаковые цифры.

Группа B

П.44. Решите сравнения (описать все возможные целые x, удовлетворяющие данным сравнениям):
а) $3x - 6 \equiv -1 \pmod{11}$; б) $5x + 56 \equiv 7 \pmod{18}$;
в) $7x + 3 \equiv 2x - 1 \pmod{13}$; г) $13x - 6 \equiv 6x + 13 \pmod{18}$.

П.45. а) Решите сравнение 1) $x^2 - 2x - 3 \underset{17}{\equiv} 0$; 2) $x^2 - 2x + 14 \underset{17}{\equiv} 0$.
б) При каких c имеет решения сравнение $16^n \underset{c}{\equiv} 17$? Найдите все возможные натуральные n для каждого из найденных c.

П.46. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 7.

П.47. Кусок бумаги порвали на 8 частей, затем некоторые из образовавшихся кусков порвали еще на 8 частей и т. д. Могло ли после нескольких таких процедур оказаться ровно 2008 кусков бумаги?

П.48. Докажите, что:
а) если $ab + cd \vdots a - c$, то $ad + bc \vdots a - c$;
б) если $ab + cd \vdots a + c$, то $ad + bc \vdots a + c$.

П.49. Натуральное число n таково, что $(n + 1) \vdots 8$. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа n также делится на 8.

П.50. Докажите, что при натуральных a и n выполнено:
$$(a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}) \vdots (a^2 - a + 1).$$

П.51. Докажите, что уравнение $xy(x + y) = \underbrace{5\ldots5}_{2008}$ не имеет решений в целых числах.

П.52. Докажите, что при различных m и n числа 2^m и 2^n имеют различные наборы цифр в десятичной записи.

П.53. Может ли при натуральных n:
а) $(5^n - 1) \vdots (4^n - 1)$; б) $(7^n - 1) \vdots (6^n - 1)$?

П.54. При каких натуральных n выражение $2^n + 3^n + 4^n$ является квадратом натурального числа?

П.55. Число a равно утроенной сумме своих цифр. Докажите, что $a \vdots 27$.

П.56. Решите уравнение в целых числах:
а) $3x^2 + 1 = 5y$; б) $2^x + 3^x + 4^x = y^2$; в) $2^x + 65 = y^2$;
г) $3^x + 55 = y^2$; д) $n! - 1 = k^2$.

П.57. Докажите, что квадрат натурального числа не может заканчиваться четырьмя одинаковыми ненулевыми цифрами.

П.58. Пусть $a = n^2$ ($n \in N$). Докажите, что среди двух последних цифр числа a хотя бы одна четна.

П.59. Докажите, что натуральное число является квадратом некоторого натурального числа тогда и только тогда, когда число его делителей нечетно.

П.60. Выписаны подряд все натуральные числа от 1 до n.
а) $n = 2008$. Делится ли полученное число на 3?
б) Каким должно быть n, чтобы полученное число делилось на 3? (Опишите n в терминах остатков от деления.)

Группа C

П.61. Докажите, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

П.62. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (используя их все по одному разу) составить шестизначное число, кратное 11?

П.63. Докажите, что если некоторый признак делимости не зависит от порядка цифр десятичной записи числа, то это признак делимости на 3, на 9 или на 1.

П.64. Пусть натуральные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел кратно:
а) 2; б) 3; в) 5; г) 4.

П.65. Докажите, что если сумма цифр числа m равна сумме цифр числа $2m$, то $m \vdots 9$.

П.66. Докажите, что $(n + 1)^2$ и $n(n - 1)$ имеют разные суммы цифр при любом натуральном n.

П.67. Пусть $2^n = 10a + b$ ($0 < b < 10$). Докажите, что $ab \vdots 6$.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел

Группа A

П.68. Найдите:
а) (822; 1374); б) (4623; 3473); в) (4373; –826); г) (–3791; 3281).

П.69. Для наибольших общих делителей из задачи П.68 найдите их линейные представления.

П.70. Что можно сказать про целые числа a и b, если:
а) $(a; b) = a$; б) $[a; b] = a$?

П.71. Известно, что $(a; b) = 1$. Найдите $(5a + 3b; 8a + 5b)$.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72
П70

Учебник имеет **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАО № 009-н от 29.01.2014 г.), **педагогической** (заключение РАО № 412 от 29.01.2014 г.) и **общественной** (заключение РКС № 400 от 07.02.2014 г.) экспертиз.

Условные обозначения:

◘ — начало обоснования, доказательства или вывода

◙ — окончание обоснования, доказательства или вывода

* — задача повышенной трудности

❗ — обратите внимание

— необязательный материал

— теоремы, определения, свойства, утверждения, правила

Группа A — задачи и упражнения на непосредственное применение понятий и теорем, аналогичные разобранным в тексте

Группа B — задачи и упражнения, требующие привлечения знания пройденного материала, но не требующие неизвестных идей для решения

Группа C — задачи, требующие для своего решения новых, не разобранных в тексте идей, методов, приёмов

Пратусевич М. Я.

П70 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. — М. : Просвещение, 2014. — 415 с. : ил. — ISBN 978-5-09-034204-9.

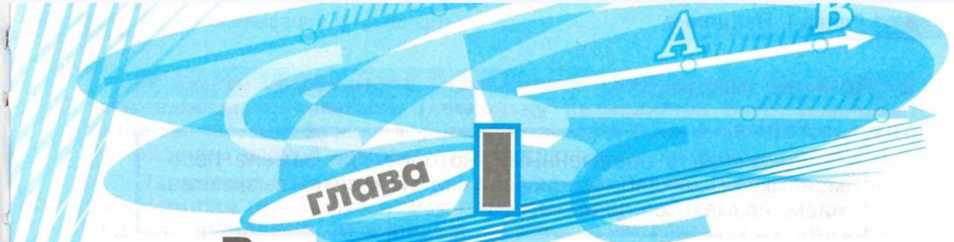
Учебник предназначен для классов с углублённым уровнем изучения математики, в которых на изучение алгебры и начал математического анализа отведено не менее 4 часов в неделю.

Содержание учебника полностью охватывает все разделы и темы, предусмотренные Федеральным государственным стандартом общего образования и требованиями к подготовке выпускника. Выделен материал, пригодный для изучения в рамках элективных курсов.

Основное внимание уделяется изучению методов решения задач. Впервые введены новые типы и классы задач по всем разделам курса.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-034204-9



глава I Введение

Особенностью данной главы является отсутствие строгих определений, а также большое количество обращений к здравому смыслу и жизненному опыту. Это неудивительно, ибо речь идет о понятиях и отношениях, лежащих в самых основах математики. Для строгого описания и введения соответствующих понятий требуется уровень, далеко выходящий за рамки школьного.

§ 1. Высказывания и предикаты

1. Понятие высказывания

Высказыванием будем называть повествовательное предложение, про которое имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Предыдущее предложение является описанием того, что такое высказывание, а не определением.

Примеры высказываний: «2 + 2 = 8» — ложное высказывание, «Волга впадает в Каспийское море» — истинное высказывание, «Всякое натуральное число, заканчивающееся четной цифрой, четно» — истинное высказывание.

Истинность или ложность высказывания называют его *истинностным значением.* Если высказывание истинно, то ему приписывают истинностное значение «T» (от английского слова true — истина), если ложно — «F» (от английского false — ложь).

А вот примеры предложений, не являющихся высказываниями: «Да здравствует труд!», «Да здравствует солнце, да скроется тьма!», «Иди сюда!», «Кто звонил?», «Ученик 10 класса».

Более сложными примерами предложений, не являющихся высказываниями, будут следующие: «Он пошел в кино», «Четырехугольник является параллелограммом», «Мы подрались».

Особенностью этих предложений, очень похожих на высказывания, является неопределенность подлежащего: кто такой «он», который пошел в кино? Какой четырехугольник является параллелограммом? Кто эти «мы», которые подрались? В зависимости от ответов на эти вопросы предложения могут оказаться истинными или ложными. Изначально же эти предложения не имеют истинностного значения.

Метод интервалов

Решите неравенство (I.184—I.189).

I.184. а) $x(x^2+2x-3)>0$; б) $(x-1)(x^2-5x+6)<0$;
в) $(x^2-3x-28)(3x^2-x+2)<0$; г) $(x^2-6x+9)(x^2-3x-4)\geqslant 0$.

I.185. а) $\dfrac{2x-1}{3-5x}<0$; б) $\dfrac{1-3x}{1-4x}\geqslant 0$; в) $\dfrac{x^2-4x-5}{-2x^2+x+6}<0$; г) $\dfrac{-x^2+x+6}{3x^2-4x-4}\leqslant 0$.

I.186. а) $\dfrac{x^3+4x^2-x-4}{x^3-3x^2-x+3}>0$; б) $\dfrac{x^2-6x-1}{x^4-7x^2+12}\leqslant 0$.

I.187. а) $\dfrac{x^2+3x-13}{x^2+x-6}>2$; б) $\dfrac{5x^2-3x+1}{x^2+2}\leqslant 3$;
в) $\dfrac{2x-3}{4x-1}\geqslant\dfrac{x-2}{x+2}$; г) $3-x\geqslant\dfrac{1}{2-x}$.

I.188. а) $\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}\leqslant\dfrac{x-2}{x^2-1}$; б) $\dfrac{x^3-4x}{x^2+5x+6}\geqslant\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$.

I.189. а) $\dfrac{2x+4}{7-5x}\geqslant\dfrac{3-2x}{5x-7}$; б) $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x-3}\leqslant\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$.

I.190. При каких значениях x определено выражение:
а) $\sqrt{\dfrac{3x+9}{x+4}}$; б) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-5}}$; в) $\sqrt{\dfrac{(x+3)(x-1)(x+2)}{x}}$;
г) $\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-5)}{x(x-1)^2}}$; д) $\sqrt{\dfrac{(x-1)^3(x+1)(x-5)}{(x-5)^2(x-2)}}$.

I.191. Придумайте неравенство, в котором ответом являлось бы множество:
а) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$; б) $[2;+\infty)$; в) $(2;+\infty)$; г) $(2;3)\cup(3;+\infty)$;
д) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$; е) $\{-2\}\cup(0;1)\cup[3;+\infty)$.

I.192. Решите неравенство:
а) $\sqrt{x-1}(x^2-2x-3)\leqslant 0$;
б) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$;
в) $(x^2-5x+6)\sqrt{2x^2-3x-5}\geqslant 0$.

I.193. Решите неравенство:
а) $|x-2|(x^2+3x-4)\leqslant 0$; б) $|x-1|(x^2+3x-10)\geqslant 0$;
в) $|x-3|(-x^2+3x+4)>0$; г) $|x+6|(x^2+5x+4)>0$.

I.194. Решите неравенство:
а) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; б) $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\leqslant\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$;
в) $\dfrac{2}{2x^2+x-3}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{2x+3}+1>0$;
г) $\dfrac{40}{x^2-9}-\dfrac{24}{x^2-4}\geqslant\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{4}{x^2+5x+6}$.

$0, \frac{1}{2} \dots a \neq 0$ $b:c$ 5

глава II

Целые числа

§ 11. Деление с остатком целых чисел

1. Деление с остатком

Деление с остатком целых чисел было изучено вами на предыдущих ступенях образования. Однако с целью систематизации и расширения ваших познаний в этой области напомним некоторые определения и факты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть a и $b\neq 0$ — два целых числа. *Разделить число a на число b с остатком* — это значит найти такие числа q и r, что будут выполнены следующие условия:
1) $a=bq+r$; 2) $0\leqslant r<|b|$.

При этом число q называется *неполным частным*, а число r — *остатком* от деления a на b. Число a именуется *делимым*, а число b — *делителем*.

Равенство 1 (при соблюдении неравенства 2) называют *записью деления с остатком*. Широко употребительным является также выражение *a дает при делении на b остаток r*.

! Остаток не может быть отрицательным числом! Кроме того, он не может быть больше или равен $|b|$.

Таким образом, от деления на b может быть не более $|b|$ различных остатков. В то же время числа $0, 1, \dots, |b|-1$ как раз и дают ровно $|b|$ различных остатков. Итак, можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение

При делении на b все целые числа дают ровно $|b|$ различных остатков.

б) Докажите, что уравнение $x! - a = y^2$ имеет конечное число решений в натуральных числах при любом натуральном a.

в) Решите в натуральных числах уравнение $x! = y^2$.

П.119. Докажите равенство $\dfrac{(a;\, b)\cdot(b;\, c)\cdot(a;\, c)}{(a;\, b;\, c)^2} = \dfrac{[a;\, b]\cdot[b;\, c]\cdot[a;\, c]}{[a;\, b;\, c]^2}$.

П.120. Пусть A — множество, состоящее хотя бы из восьми натуральных чисел, каждые два из которых не взаимно просты. Найдите множество A, если:

а) наименьшее общее кратное всех чисел из множества A равно 210, произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого натурального числа;

б) наименьшее общее кратное чисел из множества A равно 390, произведение всех чисел из A не делится на 160 и не является четвертой степенью никакого целого числа;

в) наименьшее общее кратное всех чисел из множества A равно 330, сумма всех чисел из A равна 755 и произведение всех чисел из A не является четвертой степенью никакого натурального числа.

П.121. Докажите, что: а) если $2^k - 1$ — простое число, то k — простое; б) если $2^k + 1$ — простое число, то $k = 2^n$.

П.122. Докажите, что наименьшее натуральное число, взаимно простое с каждым из чисел 2, 3, ..., n, — простое для любого натурального n.

П.123. Вычислите сумму всех делителей числа $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$.

П.124. Наибольший простой делитель числа $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ равен p_{n+1}, $p_1 = 2$. Докажите, что в этой последовательности нет пятерок.

Группа C

П.125. Пусть a_n — произведение первых n простых чисел.

а) Найдите a_3.

б) Может ли сумма двух различных членов этой последовательности быть простым числом?

в) Может ли равенство $a_m + a_n = 32\,842$ выполняться при некоторых натуральных m и n?

г) $a_m - a_n = 30\,000$. Найдите a_m и a_n.

д) Решите в целых числах уравнения с двумя неизвестными $a_n + 1 = x^2$ и $a_n - 1 = y^2$.

П.126. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, непредставимых в виде $x^2 + p$, где $x \in N$, а p — простое число.

П.127. Докажите, что при $n \geqslant 12$ простое число с номером n больше $3n$.

П.128*. Докажите, что совершенное число (т. е. натуральное число, равное сумме всех своих натуральных делителей, кроме себя самого) не является квадратом никакого натурального числа.

П.129*. Докажите, что если $a = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, где x, y, z, t — попарно различные натуральные числа, то a — составное число.

$7x^3 + 5x + 3$ $2a^3 + b$ $2x - 5xy + 3y - 7$

глава III
Многочлены

Многочлены уже изучались ранее, в частности, квадратные трехчлены, в основном с целью решения соответствующих уравнений или облегчения тождественных преобразований. При изучении данной главы мы систематизируем и расширяем круг известных сведений о многочленах, а также раскрываем общность многих свойств многочленов и целых чисел.

§ 16. Понятие многочлена

1. Определение многочлена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Выражение, являющееся *записью* произведения числа и конечного количества переменных, называется *одночленом* (*мономом*).

Обратите, пожалуйста, внимание на слова «записью произведения». Пока переменным не приданы числовые значения, мы не можем вычислить их произведение, а можем лишь записать его. В ходе дальнейшего изложения (вплоть до теоремы о совпадении формального и функционального равенства многочленов) мы будем изучать некоторые свойства *записей* сумм и произведений переменных.

Пример 1. Выражения: $-2xy$; $1{,}7abbccc$; $\dfrac{11}{7}\pi x_1x_2x_3x_5x_5$ являются одночленами. ■

Обычно произведения одинаковых сомножителей записывают в виде степени. Полученную форму записи одночлена называют *стандартной*, а числовой множитель именуют *коэффициентом* данного одночлена.

Пример 2. Стандартными формами записи одночленов из примера 1 являются (соответственно) следующие: $-2xy$; $1{,}7ab^2c^3$; $\dfrac{11}{7}\pi x_1x_2x_3x_5^2$. ■

Степенью одночлена называется сумма степеней переменных, входящих в его запись. Для одночленов примера 2 степени равны соот-

III.64. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xyz=27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=15, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{7}{5}. \end{cases}$

III.65. Решите уравнение $x^4+4x^3-2x^2+ax+b=0$, если оно имеет две пары равных корней.

III.66. Рассмотрим всевозможные произведения нескольких (возможно, одного) из первых n простых чисел ($n \geqslant 5$) (например, 2; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 5 \cdot 11$; $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ представляют некоторые такие произведения для $n=6$). Докажите, что сумма всех таких произведений раскладывается не менее чем на: а) n простых сомножителей; б) $n+1$ простых сомножителей (простые сомножители могут быть и одинаковыми).

III.67. Докажите, что если:
а) сумма и произведение двух рациональных чисел — целые числа, то и сами эти числа целые;
б) сумма, сумма попарных произведений и произведение трех рациональных чисел — целые числа, то и сами эти числа целые.

III.68. Докажите, что если:
а) сумма и произведение двух чисел положительны, то и сами эти числа положительны;
б) сумма, сумма попарных произведений и произведение трех чисел положительны, то и сами эти числа положительны.

III.69. Составьте многочлен, для которого число -1 являлось бы корнем второй кратности, числа 1, $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$ — корнями первой кратности, а свободный член равнялся -10.

III.70. Корни многочлена $P(x)=x^3+6x^2+5x+a$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти корни и число a.

III.71. Уравнение $x^4-(3a+6)x^2-2=0$ имеет 4 вещественных корня, произведение которых равно 2. Найдите a.

III.72. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет 3 вещественных корня, причем $a<0$, $c>0$. Определите знаки корней.

глава IV
Функция. Основные понятия

§ 22. Понятие функции

1. Определение функции

Одним из основных понятий математики является понятие функции. Существует несколько определений этого понятия и множество споров вокруг них. Исторически одно из первых определений звучало так: если две переменные x и y связаны между собой так, что с изменением одной из них (x — независимой переменной) меняются значения другой (переменной y), то говорят, что y есть зависимая переменная или функция от переменной x.

Самым общим является в математике следующее определение понятия функции:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть заданы некоторые множества X и Y произвольной природы и закон f, который каждому элементу x множества X ставит в соответствие *ровно один* элемент y множества Y:

$$\forall x \in X \xrightarrow{f} y \in Y$$

Тогда говорят, что на множестве X задана *функция* f со значениями в множестве Y и пишут: $X \to Y$.

Множество X называется при этом *областью определения* функции f. Иногда, в соответствии с французской традицией, множество Y называют *областью прибытия* функции f.

Важно подчеркнуть, что функция определяется не только законом соответствия, но и множествами X и Y. Если закон соответствия тот же самый (например, каждому элементу числового множества соответствует его квадрат), но сами множества X разные (например, в одном случае — множество целых чисел, а в другом — множество натуральных чисел), то функции будут тоже разные, и свойства их будут разными (см. примеры 4 и 5)!

Особенности УМК М. Я. Пратусевич «Алгебра 10-11»

I.130. Есть 3 собрания сочинений трех разных авторов. Каждое содержит по 5 томов. Сколькими способами можно их расставить на полке, если тома одного автора должны стоять рядом?

I.131. Сколькими способами можно прочитать слово «треугольник» (рис. 1.28)?

I.132. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

ТРЕУГОЛЬНИК
РЕУГОЛЬНИК
ЕУГОЛЬНИК
УГОЛЬНИК
ГОЛЬНИК
ОЛЬНИК
ЛЬНИК
ЬНИК
НИК
ИК
К

Рис. 1.28

Группа B

I.133. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых каждая последующая цифра больше предыдущей (первый разряд — разряд единиц)?

I.134. Сколько точек пересечения диагоналей в выпуклом: а) восьмиугольнике; б) n-угольнике, если никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке?

I.135. Сколько существует способов выбрать из колоды карт (52 штуки) 6 так, чтобы среди них были представители всех четырех мастей?

I.136. Сколько существует способов из 100 человек выбрать 4 пары?

I.137. Сколько существует способов выбрать 4 пары для танца из 16 юношей и 5 девушек?

I.138. Сколько слов можно составить из четырех букв А и не более чем из двух букв Б?

I.139. Докажите двумя способами (используя формулу C_n^k и с помощью комбинаторных рассуждений) формулу:
$k\cdot C_n^k = n\cdot C_{n-1}^{k-1}$.

Бином Ньютона

Группа А

I.140. Разложите с помощью бинома Ньютона: а) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$; б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^4$; в) $(x+2y)^6$; г) $(2x-0{,}5y)^5$.

I.141. Найдите член разложения $(1+2x)^{10}$ с наибольшим коэффициентом.

I.142. Какое слагаемое в разложении $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

I.143. Сколько рациональных слагаемых в разложении бинома $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

I.144. Найдите: а) коэффициент при x^5 в стандартном виде многочлена $(1-2x+x^2)^6$; б) сумму коэффициентов этого многочлена.

I.145. Найдите коэффициенты при: а) $x^{100}y^{50}z^{30}$; б) $x^{200}y^{30}z^9$ в разложении $(x+y+z)^{239}$.

I.146. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

I.147. В каком из выражений после раскрытия скобок и приведения подобных членов коэффициент при x^{17} больше: у выражения $(1+x^2-x^3)^{1000}$ или у выражения $(1-x^2+x^3)^{1000}$?

I.148. Вычислите:
а) $1+2C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\ldots+2^n\cdot C_n^n$;
б) $1+3C_n^1+3^2\cdot C_n^2+\ldots+3^n\cdot C_n^n$;
в) $1-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n\cdot C_n^n$.

Группа B

I.149. Докажите тождество:
а) $C_{n+m}^n = C_n^0C_m^n + C_n^1C_m^{n-1}+\ldots+C_n^nC_m^0$;
б) $1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\ldots+n\cdot C_n^n = n\cdot 2^{n-1}$;
в) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

I.150. На окружности отмечены 11 точек. Сколько существует выпуклых многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

I.151. Докажите, что число способов выбрать четное число предметов из n равно числу способов выбрать нечетное число предметов.

I.152. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество полей вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля: а) ровно за 7 ходов; б) вообще?

Ограниченные числовые множества. Точные границы

Группа А

I.153. Сформулируйте определение: а) множества, ограниченного снизу; б) нижней границы; в) минимума множества. Приведите примеры множеств, имеющих минимум и не имеющих минимум.

I.154. Сформулируйте отрицание утверждения о том, что число M — верхняя граница множества A.

I.155. Запишите задание множества верхних границ множества A характеристическим свойством.

I.156. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество, M_A — множество его верхних границ. Докажите, что M_A ограничено снизу.

I.157. Докажите, что если A — непустое ограниченное множество, то:
а) $\inf A \leqslant \sup A$;
б) $\inf A = \sup A$ тогда и только тогда, когда A состоит из одного числа.

I.158. Пусть A — числовое множество, ограниченное сверху:
а) докажите, что $B=\{-x\colon x\in A\}$ ограничено снизу;
б) верно ли, что $C=\{x^2\colon x\in A\}$ ограничено сверху?

I.159. Пусть A — ограниченное множество. Докажите, что $\exists K>0$: $\forall x\in A\ |x|\leqslant K$. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

I.160. Пусть $A\subset B$ и B ограничено сверху. Докажите, что A также ограничено сверху. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для множеств, ограниченных снизу.

I.161. Докажите, что максимальный элемент множества является его супремумом.

Особенности УМК М. Я. Пратусевич «Алгебра 10-11»

Оказывается, если слово «число» заменить на слово «выражение» или «функция», ситуация усложняется. Имеют место следующие утверждения:

Утверждение 1

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$. Если функция $\varphi(x)$ определена при всех значениях x из области определения этого уравнения, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$.

Комментарий. Здесь существенным является условие: «функция $\varphi(x)$ определена при всех значениях x из области определения этого уравнения». Если это не так, может произойти потеря корней. Действительно, если $x = a$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$, — не входит в область определения функции $\varphi(x)$ (т. е. если $\varphi(a)$ не определено), то число a не является корнем уравнения $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$, т. е. произошла потеря корня.

Пример 75. Уравнения $x + 3 = 2$ и $x + 3 + \sqrt{x} = 2 + \sqrt{x}$ не равносильны! Единственный корень первого уравнения ($x = -1$) не является корнем второго уравнения, которое вообще не имеет вещественных корней. ◘

Пример 76. После упрощения уравнения $x^2 + x + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} + 2$ получим $x^2 + x - 2 = 0$, откуда $x = 1$ или $x = -2$. Но при этом $x = -2$ не является корнем исходного уравнения! Корнем исходного уравнения является 1. ◘

Ситуации примеров 75 и 76 стали возможными благодаря тому, что в процессе преобразований изменилась область определения уравнения. В частности, в примере 76 уравнение, равносильное исходному, может быть записано так: $x^2 + x - 2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} = 0$. Знаки радикалов в записи этого уравнения «напоминают» о том, что ООУ является луч $[1; +\infty)$. Можно также записать систему, равносильную исходному уравнению: $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Таким образом, даже такие безопасные с виду действия, как приведение подобных слагаемых или взаимное уничтожение одинаковых выражений в обеих частях уравнения, могут расширять область определения уравнения и, соответственно, вести к приобретению посторонних корней.

Утверждение 2

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$. Если функция $\varphi(x)$ определена при всех значениях x из области определения этого уравнения и не обращается в нуль ни в одной точке этого множества, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$.

Комментарий. Условие «функция $\varphi(x)$ определена при всех значениях x из области определения этого уравнения» играет ту же роль, что и раньше (в противном случае уравнение $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ даже не является следствием исходного уравнения), а условие «$\varphi(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке области определения исходного уравнения» предохраняет от появления посторонних корней.

Пример 77. Решим уравнение $\dfrac{2}{2-x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2x - x^2}$. Если умножить обе части уравнения на $2(2x - x^2)$, получим $4x + 2x - x^2 = 8$, откуда $x = 4$ или $x = 2$. Однако $x = 2$ не является корнем уравнения, так как не входит в ООУ. Ответ: $\{4\}$. ◘

Здесь так же, как в предыдущем примере, в записи полученного уравнения нет «напоминания» о том, что его область определения не содержит точек 0 и 2.

Таким образом, решая уравнение с использованием равносильных преобразований, нужно внимательно следить, чтобы каждое следующее уравнение действительно было равносильно предыдущему.

Этот подход оправдывает себя при работе с технически несложными и стандартными уравнениями.

Использование уравнений-следствий. Цепочки следствий и проверка

Весьма часто бывает трудно следить за равносильностью преобразований, особенно когда речь идет о технически сложных уравнениях. В таких случаях имеет смысл выстроить цепочку следствий, т. е. проследить, чтобы по пути не произошло потери корней. При этом как правило появляются посторонние корни, которые можно потом отбросить проверкой — но проверка при этом является обязательной частью решения! Например, имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$. Тогда уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ является его следствием.

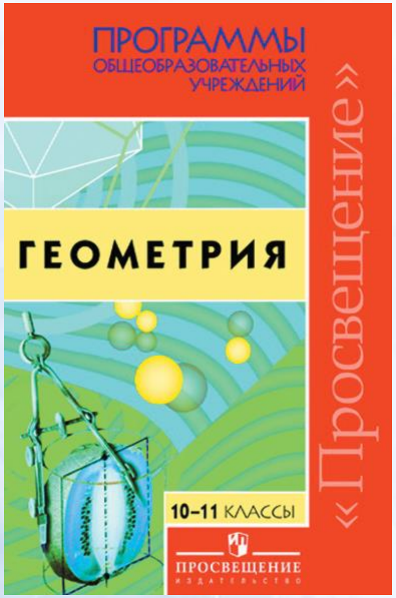
Пример 78. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5}$. При возведении в квадрат обеих частей данного уравнения может расшириться область определения уравнения, могут также появиться посторонние корни, но наверняка не происходит потери корней. Значит, получившееся уравнение будет следствием исходного. Возводим в квадрат:

$$x + 1 = x - 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{2x-5} + 2x - 5.$$

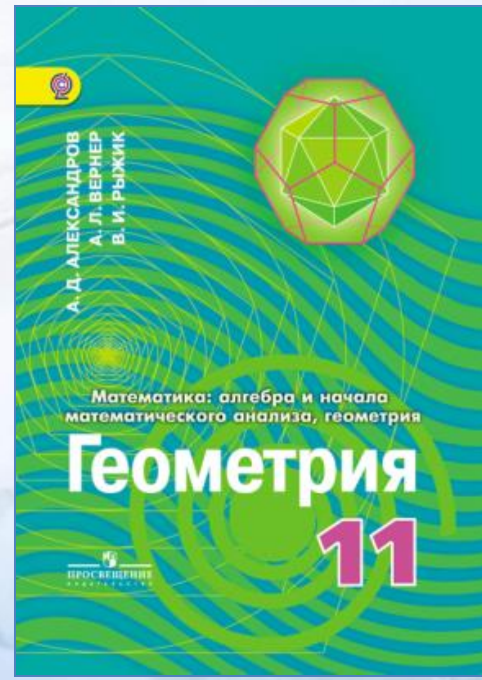
После преобразований получим $\sqrt{x-2}\sqrt{2x-5} = 4 - x$. Еще раз возводим в квадрат: $2x^2 - 9x + 10 = x^2 - 8x + 16$.

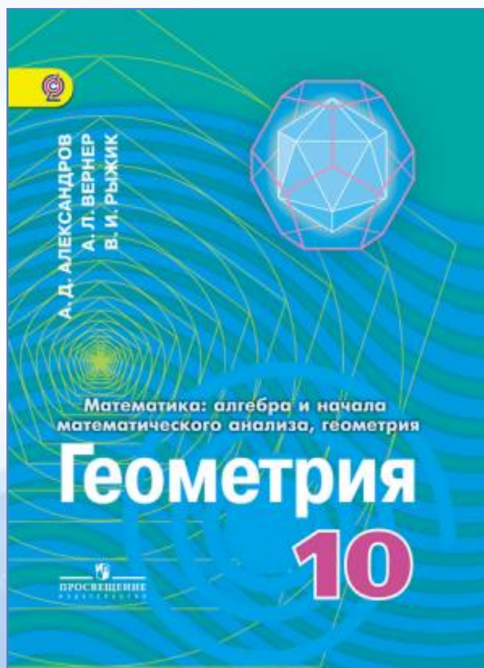
Следовательно $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x = -2$ или $x = 3$.

ЛИНИЯ УМК А. Д. АЛЕКСАНДРОВА и др. 10–11 КЛАССЫ
Углублённый уровень



- Программы
- Учебник
- Дидактические материалы
- Книга для учителя





Введение

I. О стереометрии

В предыдущих классах мы изучали главным образом геометрию на плоскости — планиметрию, а теперь будем заниматься геометрией в пространстве. Ее называют стереометрией (от греческих слов «стереос» — телесный, пространственный, «метрео» — измеряю).

Обращаясь к геометрии в пространстве — к стереометрии, будем предполагать, что геометрия на плоскости — планиметрия — нам известна.

Каждый представляет наглядно плоскость или по крайней мере конечный кусок плоскости, например плоскость стола, доски и т. п. В планиметрии плоскость рассматривается сама по себе, независимо от окружающего пространства. Однако, занимаясь геометрией на плоскости, мы все же помним, что плоскость расположена в пространстве и что в нем много плоскостей. На каждой из них выполняется планиметрия.

Таким образом, в стереометрии плоскость — это фигура, на которой выполняется планиметрия, т. е. справедливы аксиомы планиметрии, а вместе с ними и их следствия — теоремы планиметрии. Можно не помнить всех аксиом планиметрии, надо только понимать, что плоскость — это фигура, в которой есть точки, прямые, отрезки, углы с их основными свойствами, а за ними и другие известные фигуры: треугольники, окружности и т. д. Свойствами этих плоских фигур, теоремами о них, доказанными в планиметрии, мы постоянно будем пользоваться.

При этом надо иметь в виду, что хотя в основу планиметрии могут быть положены различные системы аксиом (подробнее об этом сказано в § 6) и само построение планиметрии допускает различные пути, но в результате, несмотря на все эти различия, в планиметрии изучают одни и те же геометрические фигуры и получают одни и те же их свойства, выраженные в теоремах и аксиомах: теорема Пифагора и теорема о сумме углов треугольника, признаки равенства треугольников и свойства движений, операции с векторами и теорема о площади круга и т. д.

Важнейшими объектами стереометрии являются пространственные фигуры, не лежащие ни в какой плоскости, например: шар, сфера, куб, параллелепипед, призма, пирамида (рис. 1). Конечно, все они знакомы вам, но, чтобы изучить их свойства, необходимо сначала рассмотреть взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве (главы I—III). Однако в задачах первых глав мы будем рассматривать многогранники. Сейчас мы перечислим некоторые из них и дадим их описание.

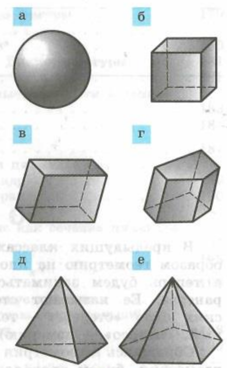


Рис. 1

Куб — это многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты (рис. 1, *б*).

Параллелепипед — это многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы (рис. 1, *в*). Вы уже знакомы с начальных классов с **прямоугольным параллелепипедом**, у которого все грани — прямоугольники.

***n*-угольная призма** — это многогранник с $n + 2$ гранями, из которых две, называемые **основаниями** — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы, они называются **боковыми гранями призмы** (рис. 1, *г*). При этом любая боковая грань имеет с каждым из двух оснований по одной общей стороне.

Таким образом, *параллелепипед — это призма, в основании которой — параллелограмм.*

Правильная *n*-угольная призма — это такая призма, у которой все боковые грани — прямоугольники, а каждое основание — правильный n-угольник.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 1, *д*, *е*). Первая грань называется **основанием пирамиды**, остальные — **боковыми гранями**; их общая вершина называется **вершиной пирамиды**. Стороны граней пирамиды называются ее **ребрами**, причем ребра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми**. Если основание пирамиды n-угольник, то она называется ***n*-угольной**. Простейшей среди всех пирамид (и даже среди много-

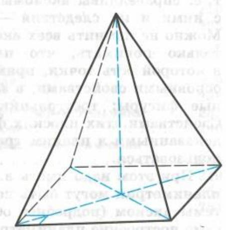


Рис. 2

понятий неразрывно связано с уточнением математических рассуждений — определений и доказательств. А точная теория нужна в конечном счете для применения в науке и технике, так же как в точной работе нужен хороший точный инструмент.

Математика, в частности геометрия, и представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Подведем итог. Идеальные геометрические понятия возникают в результате отвлечения от всего внешнего и случайного для самих пространственных отношений и форм. Это отвлечение закрепляется в выводах геометрии, которой нужна прочная логическая структура, как нужна прочная структура хорошей машине.

Наука, поднимаясь к абстракциям, не удаляется от истины, а приближается к ней, проникая в природу точнее и глубже.

III. О структуре учебника

Учебник «Геометрия, 10» и его продолжение «Геометрия, 11» (тех же авторов) предназначен для профильного курса геометрии. Эти учебники разбиты на 10 глав, из которых первые четыре главы составляют «Геометрию, 10», а остальные шесть глав — «Геометрию, 11». Главы разбиты на параграфы, а параграфы — на пункты. Номера пунктов, соответствующих обязательному минимуму содержания профильного курса геометрии, выделены в учебниках цветом. Также выделены цветом и номера параграфов, в которых есть материал обязательного минимума. Основным предметом этих учебников является курс элементарной стереометрии. Сейчас в обязательный минимум включен и планиметрический материал. Весь он помещен в конце этого учебника в § 20. Когда и как изучать этот материал, решит учитель.

Обширный материал учебников «Геометрия, 10» и «Геометрия, 11», выходящий за рамки минимума профильного курса, может составить несколько элективных (или факультативных) курсов, например: *Выпуклые фигуры*; *Многогранники*; *Поверхности*; *Преобразования*; *Современная геометрия и теория относительности*.

Номера тех задач, которые (по мнению авторов) обязательно следует решить, также выделены цветом.

Пространственные и плоские фигуры и тела

Мы уже говорили во введении к главе II, что Евклид свои книги о стереометрии начинает такими определениями: «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину» и «Граница же тела — поверхность». А за ними следуют еще 25 определений, в которых говорится и о сфере, и о конусе, и о цилиндре, но понятие о теле и его определение в них никак не используются. В этой главе мы сначала рассмотрим конкретные виды пространственных фигур — шар и сферу, цилиндры и конусы, а затем в последнем параграфе дадим понятие о теле, причем дать точное определение этого понятия окажется совсем непросто.

Зачем же оно вообще нужно в школьном курсе? Нельзя ли обойтись без него?

Но курс 11-го класса начинается с изучения многогранников, а многогранником называется тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. А затем речь пойдет об объемах тел, о площадях их поверхностей. Так что о понятии тела мы говорим впрок, имея в виду курс 11-го класса. Хотя те, кого удовлетворит чисто наглядное представление о теле, могут ограничиться знакомством с первым пунктом в § 19 «Тела» или вообще считать, как Евклид, что тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину.

§ 15. Сфера и шар

15.1. Понятия сферы и шара

Главу о пространственных (не плоских) фигурах начнем с изучения шара — одной из простейших, но очень богатой разнообразными и важными свойствами фигуры. О геометрических свойствах шара и его поверхности — сферы — написаны целые книги. Некоторые из этих свойств были известны еще древнегреческим геометрам, а некоторые найдены совсем недавно, в последние годы. Эти свойства (вместе с законами естествознания) объясняют, почему, например, форму шара имеют небесные тела и икринки рыб, почему в форме шара делают батискафы и футбольные мячи, почему так распространены в технике шарикоподшипники и т. д. Из этих разнообразных свойств шара мы можем доказать лишь самые простые. Доказательства других, хотя и очень важных, часто требуют применения совсем не элементарных методов, несмотря на то что формулировки таких свойств могут быть и очень простыми: например, доказать, что среди всех тел, имеющих данную площадь поверхности, наибольший объем имеет шар. Определяются сфера и шар в пространстве совершенно так же, как окружность и круг на плоскости.

Определение

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется *центром сферы*, а данное расстояние — ее *радиусом*.

Таким образом, сфера с центром в точке O и радиусом R есть множество таких точек X в пространстве, для которых $OX = R$.

Определение

Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного положительного расстояния. Указанная точка называется *центром шара*, а указанное расстояние — *радиусом шара*.

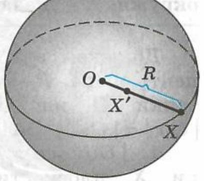


Рис. 166

Таким образом, шар с центром в точке O и радиусом R есть множество точек X в пространстве, для которых $OX \leqslant R$ (рис. 166).

Шар есть объединение множества точек X, для которых $OX = R$, и множества точек X', для которых $OX' < R$.

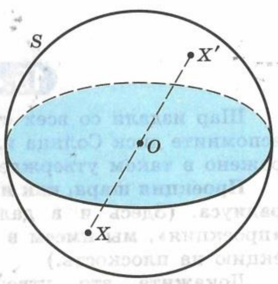
Множество точек, для которых $OX = R$, — это сфера; она называется **поверхностью шара**; говорят также, что она ограничивает шар. Точки X' шара, для которых $OX' < R$, называются его **внутренними точками**. Про эти точки говорят также, что они ле-

15.5. Симметрия сферы и шара

Напомним, что **симметрией фигуры** в курсе планиметрии мы называем свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее (нетождественное) движение, совмещающее ее саму с собой. А **движением фигуры** называют отображение этой фигуры, сохраняющее расстояние между точками. Эти же определения сохраняются и в стереометрии.

Изучая важнейшие пространственные фигуры, мы сразу же будем говорить и об их симметрии (иногда оставаясь на интуитивном уровне). Подробно движения в пространстве изучаются в конце курса 11-го класса.

Сфера и шар обладают разнообразными видами симметрий. Рассмотрим их. Подробные рассуждения мы проводим для сферы. Аналогичные рассуждения для шара проведите самостоятельно.



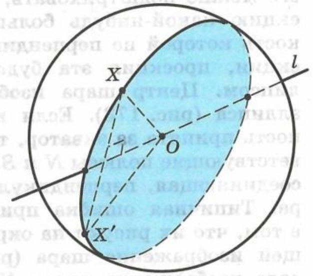
$OX' = OX = R$

Рис. 175

Во-первых, центр O сферы S (шара U) является ее (его) центром симметрии.

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно центра O точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 175).

Действительно, точка O — середина отрезка XX', $OX = R$, а потому $OX' = R$ и $X' \in S$. ■



$OX' = OX = R$

Рис. 176

Во-вторых, любая прямая l, проходящая через центр O сферы S (шара U), является ее (его) осью симметрии.

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно прямой l точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 176).

Действительно, если $X \in S$ и не лежит на прямой l, то прямая l является серединным перпендикуляром отрезка XX', а точка $O \in l$. Поэтому $OX' = OX = R$, т. е. $X' \in S$. Если же $X \in l$, то $X' = X$, а потому $X' \in S$. ■

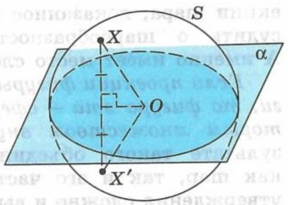


Рис. 177

В-третьих, любая плоскость α, проходящая через центр O сферы S, является плоскостью симметрии сферы S.

Это значит, что, взяв любую точку X, принадлежащую сфере S, и построив симметричную ей относительно плоскости α точку, мы получим точку X', также принадлежащую сфере S (рис. 177).

Действительно, если точка X не лежит на плоскости α, то α перпендикулярна отрезку XX' и все ее точки равноудалены от точек X и X'. Поскольку точка $O \in \alpha$, то $OX' = OX = R$, т. е. $X' \in S$. Если же $X \in \alpha$, то $X' = X$ и $X' \in S$. ■

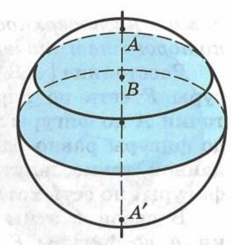


Рис. 178

В-четвертых, любой диаметр AA' сферы S (шара U) является ее (его) осью вращения.

Это значит, что в сечении любой плоскостью α, пересекающей отрезок AA' в некоторой точке B и перпендикулярной ему, получится окружность с центром в точке B (рис. 178).

Это утверждение уже было доказано в п. 15.2.

Любым же сечением сферы S плоскостью, содержащей диаметр, является большая окружность (рис. 179), вращение которой вокруг этого диаметра и образует сферу. Именно так определял сферу Евклид «Сфера будет: если при неподвижности диаметра полукруга вращающийся полукруг снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть сфера». (Говоря «полукруг», Евклид, конечно, подразумевал полуокружность.) Вращение глобуса хорошо иллюстрирует вращательную симметрию сферы.

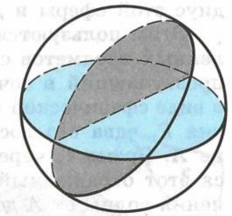


Рис. 179

15.6. Шар и расстояние от точки до фигуры

Представим себе какую-нибудь фигуру F и точку A вне ее. Допустим, в фигуре F есть точка B, ближайшая к точке A. Опишем вокруг точки A шар радиусом $R = |AB|$. Точка B будет лежать на его поверхности (рис. 180). Но внутри шара не будет точек фигуры F, потому что точки внутри шара лежат ближе к центру A, чем точка B, а B — ближайшая к A точка фигуры F.

Значит, если точка B — ближайшая к A точка фигуры F, то она лежит на поверхности такого шара с центром A, внутри которого нет точек фигуры F.

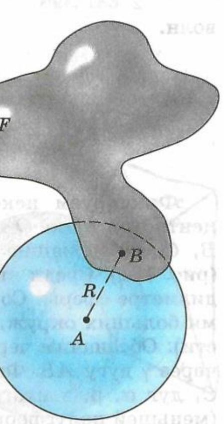


Рис. 180

Верно также обратное: если точка B фигуры F лежит на поверхности такого шара с центром A, внутри которого нет точек фигуры F, то такая точка B ближайшая к A. (Это ясно потому, что внутри шара нет точек фигуры F, а значит, они удалены от его центра на расстояние, не меньшее $|AB|$.)

Таким образом, приходим к следующему выводу. *Точка B фигуры F, ближайшая к точке A (лежащей вне F) — это такая ее точка, которая*

Точка T дает нам также общую точку плоскости сечения и плоскости PAC — ведь (PA) лежит в (PAC). А одна такая точка, общая для (PAC) и плоскости сечения, уже есть — это точка Y. Тогда прямая YT является общей для этих плоскостей. На нашем рисунке она пересекает ребро PC. Обозначим точку их пересечения через K. Теперь осталось только соединить точку K с точкой X, и нужное сечение нарисовано (рис. 24, *б*).

Можно было бы действовать несколько иначе. Например, можно сначала найти точку пересечения прямой BC с плоскостью сечения — результат был бы один и тот же (?).

И наконец, о том, почему у нас получилось такое построение. Ведь могло бы оказаться, что тех точек пересечения, которые мы ищем, просто нет! Прямая PA вполне может быть параллельна (XZ) при соответствующем выборе точек. Как быть тогда?

Смотрим

2.2. **2** Три попарно пересекающиеся прямые пересекают данную плоскость (рис. 25). Верно ли сделан рисунок?

Рисуем

2.3. **1** Нарисуйте два треугольника ABC и ABD, не лежащие в одной плоскости. Внутри отрезков AD и BD возьмите точки K и L. а) Пусть (KL) пересекает (AB) в точке M. Объясните, почему точка M является точкой пересечения (KL) и (ABC). б) Пусть (KL) и (AB) не пересекаются. Объясните, почему в этом случае (KL) и (ABC) не пересекаются.

2.4. **1** Нарисуйте два треугольника ABC и CBD, не лежащие в одной плоскости. Нарисуйте сечение этой фигуры плоскостью, проходящей через: а) три точки внутри отрезков AC, AB, CD (по одной точке на каждом отрезке); б) точку внутри отрезка AC, точку на продолжении отрезка BC, точку внутри отрезка BD; в) точку A, точку внутри отрезка CD и точку внутри отрезка BD; г) точку D и среднюю линию треугольника BCD, параллельную (BC).

2.5. **1** Два квадрата $ABCD$ и $ADEF$ (вершины указаны в порядке обхода) не лежат в одной плоскости. Некоторая плоскость имеет с этой фигурой общую точку C. Нарисуйте сечение данной фигуры этой плоскостью, если, кроме того, плоскость проходит через: а) точку внутри отрезка AB и точку внутри отрезка AF; б) точку внутри отрезка AF и точку внутри отрезка EF; в) середину отрезка AF и середину отрезка DE; г) точку на продолжении отрезка AD и точку на продолжении отрезка AF.

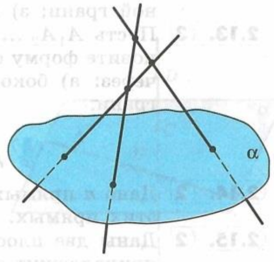


Рис. 25

2.16. **2** Каждые четыре точки некоторой фигуры лежат в одной плоскости. Докажите, что и сама фигура является плоской.

2.17. **3** Дано n прямых, проходящих через данную точку. Докажите, что существуют: а) точки вне этих прямых; б) прямые, проходящие через данную точку и не совпадающие с имеющимися прямыми; в) плоскость, пересекающая все эти прямые.

Исследуем

2.18. **3** Пусть $PABC$ — тетраэдр, точка K — середина ребра BC, точка L — середина ребра PB, точка M — середина ребра PA, точка N — середина ребра AC. Можно ли провести плоскость через прямые: а) AP и KM; б) AP и KL; в) AP и LN; г) LM и KN; д) KM и NL?

2.19. **3** Плоскость пересекает куб. Сколько она может пересекать: а) его граней; б) его ребер?

Прикладная геометрия

2.20. **2** а) Объясните, почему стол на трех ножках устойчивее, чем на четырех ножках. б) Как проверить, будет ли стол на четырех ножках устойчив на горизонтальном полу, ничего не измеряя? в) Как вы объясните, почему столы в основном делают на четырех ножках, хотя они менее устойчивы?

§ 3. Взаимное расположение прямых в пространстве

3.1. Классификация взаимного расположения прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые

Как известно из планиметрии, для двух прямых на плоскости возможны лишь два случая их взаимного расположения: либо эти прямые пересекаются, либо они параллельны. Поскольку в пространстве имеются плоскости и на них выполняется планиметрия, то эти два случая взаимного расположения двух прямых сохраняются и для пространства. Но в пространстве добавляется еще один случай — когда две прямые не лежат в одной плоскости. Такие две прямые легко построить.

Возьмем любые четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Тогда прямые AB и CD не лежат в одной плоскости (рис. 26).

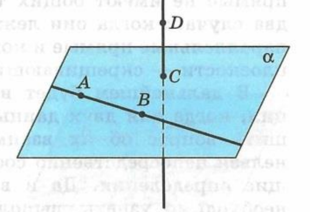
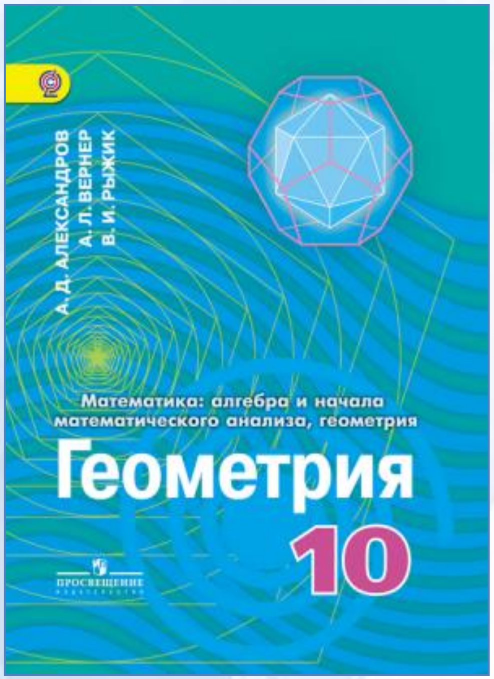


Рис. 26



Итоги главы IV

В своей основной части глава IV, как и глава III, описательна и наглядна: ведется рассказ о сфере и шаре, цилиндре и конусе; доказываются достаточно простые теоремы о сечении шара, цилиндра и конуса плоскостями (пп. 15.2, 17.1, 18.2), причем у цилиндра и конуса речь идет лишь о плоскостях, параллельных их основаниям. На наглядном уровне говорится и о симметрии этих тел. Но дополнительный материал в этой главе весьма обширен и разнообразен. По существу, именно с этой главы и начинается углубленный курс геометрии.

Отметим важнейшее из этого материала, расширяющего или углубляющего основное содержание.

1) Классическая теорема о касательной плоскости к сфере (п. 15.3) ведет к рассказу о важных понятиях современной математики — опорной плоскости и выпуклых фигурах (§ 16). В § 16 доказана теорема об опорных плоскостях к ограниченной фигуре в концах ее диаметра, являющаяся современным обобщением теоремы о касательной плоскости к сфере.

2) Доказаны (§ 17 и § 18) метрические (фокальные) свойства плоских сечений цилиндра и конуса вращения и рассказано о различных подходах к теории конических сечений.

3) Рассказано (§18) о центральном проектировании и доказана теорема Дезарга.

4) В § 19 «Тела» введены понятия внутренних и граничных точек фигуры. Эти понятия применяются во всех разделах современной математики и лежат в основе того ее раздела, который называют «Общая топология». О топологии будет сказано в главе X «Современная геометрия». Здесь же лишь скажем, что топологическими называют такие свойства фигур, которые сохраняются при взаимно однозначных и взаимно непрерывных деформациях фигур, а общая топология изучает топологические свойства фигур. Изучение тел и их поверхностей в главе IV лишь началось. Оно будет продолжено в 11-м классе (главы V—VII).

Наконец, в § 20 рассмотрены более сложные, чем изучавшиеся в курсе основной школы, вопросы планиметрии.

Готовимся в вуз

Для тех, кто уже думает о вступительных экзаменах в вуз, мы помещаем некоторые геометрические задачи, соответствующие уровню части 2 Единого государственного экзамена по математике.

1. Четыре прямые расположены в пространстве так, что каждые две из них пересекаются и никакие три не имеют общей точки. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

2. Прямоугольные проекции четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со стороной 2. Одна из его сторон равна $\sqrt{5}$. Вычислите его периметр.

Ответ: $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

3. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами α и β соответственно. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

4. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определите угол между этим ребром и катетом AC.

Ответ: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi)$.

5. Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми a и b, если расстояние между точками A прямой a и B прямой b, равноотстоящими от основания C на прямой a и D на прямой b общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2p$, а $DC = AC = BD = p$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

6. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C, такие, что $AB = 27$ и $BC = 18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

Ответ: 8.

7. Три хорды шара, исходящие из одной его точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60°. Найдите радиус шара.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

15. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

16. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

17. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной a и острым углом $\varphi = \angle BAD$ при вершине A, а высота призмы равна h. Найдите расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D.

Ответ: $\frac{a\sqrt{h^2+a^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

18. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислите угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O — центр основания конуса.

Ответ: $\arccos\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2}}\right)$.

19. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Найдите угол φ между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$.

20. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Высота треугольной пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите высоту треугольной пирамиды, если расстояние между наибольшими боковыми ребрами равно 1.

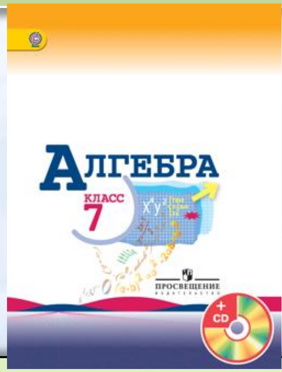
Ответ: $\sqrt{2}$.

22. В тетраэдре $PABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B, C равны π. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами PA и BC, если $BC = 4$, $AC = 5$, $AB = 6$.

Ответ: $\sqrt{\frac{45}{2}}$.

23. Основание тетраэдра $SABC$ — равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние

Уже доступны эл. приложения по «Алгебре» Ю.Н. Макарычева (7 кл.) и «Геометрия» Л.С. Атанасяна (7-9 кл.)



В разделе «Каталог» вы можете бесплатно скачать электронные приложения к учебникам.

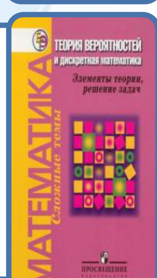
Если вы видите на обложке учебника соответствующий значок — монитор с надписью «PROSV.RU» значит, приложение доступно для скачивания.

ПОСОБИЯ ПО АТТЕСТАЦИИ

Серия «Текущий контроль»

Серия «Итоговый контроль: ГИА»

Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ»



Серия «Сложные темы ЕГЭ»

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Серия «Текущий контроль»

Геометрия. Диагностические тесты

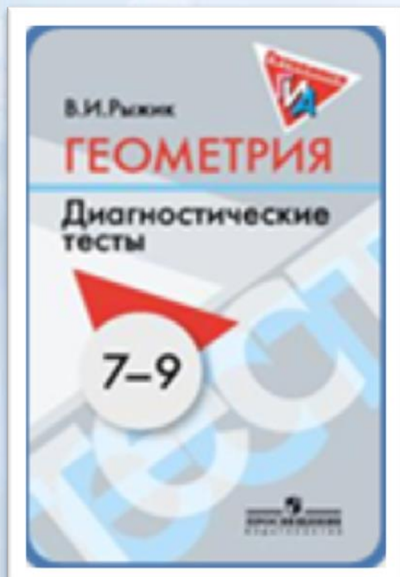
Автор: Валерий Идельевич Рыжик

кандидат педагогических наук, учитель математики лицея «Физико-техническая школа» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН,

Заслуженный учитель РФ, лауреат Алферовского фонда (2001), премии Texas Instruments «Выдающийся учитель» (1998),

победитель конкурсов фонда «Династия» (2004 - «Учитель-исследователь», 2006 - «Учитель, воспитавший ученика»).

Автор педагогической монографии, дидактических материалов по алгебре и геометрии, соавтор 20 учебников по геометрии.



Рыжик В. И. Геометрия. Диагностические тесты. 7-9 классы.

5 вершины, взятые через одну, являются вершинами другого правильного многоугольника.

Тест 137. Правильный многоугольник

СВОЙСТВО

В некотором правильном многоугольнике:

1 есть центр симметрии;
2 есть острый угол при вершине;
3 число сторон равно числу диагоналей;
4 диаметр является стороной;
5 найдутся перпендикулярные диагонали.

Тест 138. Правильный многоугольник

ПРИЗНАК

Многоугольник является правильным, если:

1 у него равны между собой все стороны и равны между собой все диагонали;
2 он шестиугольник, имеющий 6 осей симметрии;
3 у него все стороны равны и около него можно описать окружность;
4 у него все углы равны и около него можно описать окружность;
5 он является пересечением двух квадратов, один из которых получен из другого поворотом вокруг их общего центра на 45°.

Тест 139. Правильный многоугольник

ПРИЗНАК

1 Многоугольник не является правильным, если он составлен не из равнобедренных треугольников.
2 Многоугольник с чётным числом сторон является правильным, если у него есть центр симметрии.
3 Многоугольник является правильным, если у него есть больше одной оси симметрии.
4 Многоугольник не является правильным, если у него нет центра симметрии.
5 Пятиугольник является правильным, если у него есть 5 равных между собой диагоналей.

Тест 140. Правильный многоугольник

ПРИЗНАК

Многоугольник является правильным, если это:

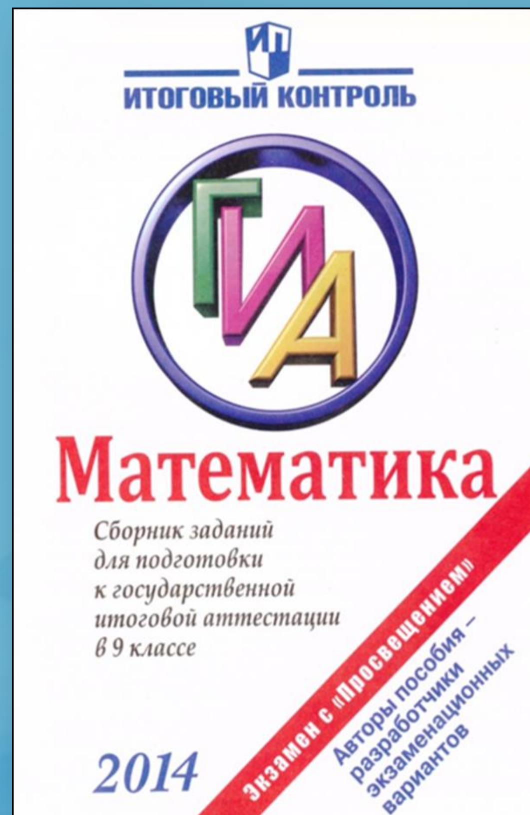
1 многоугольник, вершины которого являются серединами всех сторон правильного многоугольника;

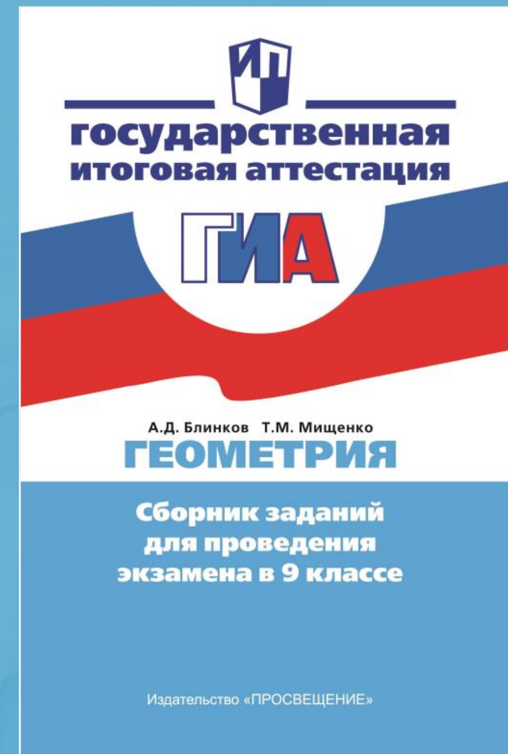
Продолжение

Тест	Задания					Тест	Задания					Тест	Задания				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
85	+	–	+	+	–	113	–	+	–	–	–	141	–	+	+	?	+
86	+	+	+	–	+	114	+	+	+	+	–	142	+	+	+	+	+
87	+	+	+	+	+	115	+	+	–	–	–	143	–	+	–	–	–
88	+	–	+	–	+	116	+	+	+	–	–	144	+	+	+	+	+
89	+	+	+	–	–	117	+	?	+	–	+	145	+	+	+	–	+
90	+	+	+	–	–	118	+	–	–	–	–	146	+	+	+	–	–
91	+	+	–	–	–	119	+	!	+	–	!	147	–	?	?	+	–
92	–	?	?	–	?	120	–	–	+	+	–	148	–	–	?	?	?
93	+	–	–	+	+	121	–	+	+	+	–	149	–	–	–	–	+
94	+	–	+	+	–	122	–	–	+	–	–	150	?	–	–	?	?
95	–	+	–	–	–	123	+	+	–	–	+	151	+	+	+	+	–
96	–	–	–	–	–	124	+	–	+	–	+	152	–	–	+	–	+
97	+	+	–	–	–	125	–	+	+	+	–	153	+	+	+	+	+
98	+	+	+	+	–	126	–	–	+	–	–	154	+	+	–	+	–
99	–	+	+	+	–	127	–	+	–	–	–	155	?	–	?	–	–
100	+	+	+	+	–	128	+	–	+	+	–	156	–	–	–	+	–
101	+	+	+	+	+	129	+	!	+	–	–	157	+	–	+	+	–
102	+	+	+	!	–	130	–	?	–	!	!	158	–	+	–	–	+
103	–	–	+	–	+	131	–	–	+	–	+	159	+	+	–	?	+
104	+	+	+	+	–	132	+	+	+	+	+	160	–	+	+	+	+
105	+	–	+	+	+	133	–	+	+	–	–	161	–	+	+	+	–
106	+	+	+	+	+	134	–	–	+	+	–	162	+	–	+	–	+
107	+	+	+	+	+	135	+	–	+	–	+	163	+	+	+	+	+
108	–	+	–	+	–	136	+	+	–	+	–	164	+	+	+	+	+
109	–	?	–	!	!	137	?	?	?	?	?	165	?	?	?	–	–
110	?	–	–	–	!	138	+	+	+	–	+	166	?	–	?	–	–
111	–	–	+	+	–	139	–	–	–	–	+	167	+	–	–	+	–
112	+	+	+	+	+	140	+	–	–	–	+	168	–	+	+	–	+

Серия
«Работаем по новым стандартам»

Серия «Итоговый контроль: ГИА»





Итоговая аттестация девятиклассников: новый порядок

Пересмотрен порядок проведения государственной итоговой аттестации (ГИА) по программам основного общего образования, обусловленный принятием нового Закона об образовании.

ГИА проводится в следующих формах: первая - основной государственный экзамен (ОГЭ); вторая - письменные и устные экзамены с использованием текстов, тем, заданий, билетов (государственный выпускной экзамен, ГВЭ) для учащихся специальных учебно-воспитательных учреждений закрытого типа, в школах, находящихся за рубежом и учащихся с ограниченными возможностями здоровья; третья форма ГИА предусматривается для тех, кто выбрал экзамен по родному языку и/или родной литературе.

основного государственного

Русский язык - ***принципиальных изменений нет.***
Изменилось количество заданий в экзаменационной работе (количество заданий сократилось с 18 до 15). Изменен максимальный балл за выполнение работы (уменьшен с 42 до 39). Задания в варианте представлены в режиме сквозной нумерации без буквенных обозначений А, В, С. Изменена форма записи ответа на каждое из заданий 2–14: в КИМ 2015 г. требуется записывать цифру, соответствующую номеру правильного ответа. Добавлены два альтернативных задания 15.2 и 15.3 (сочинение-рассуждение).
Литература - ***изменений нет.***
Математика - ***содержательных изменений нет.***
Изменена форма записи ответа на каждое из заданий 2, 3, 8, 14: в КИМ 2015 г. требуется записывать цифру, соответствующую номеру правильного ответа.
Обществознание – ***содержательных изменений нет***.
Изменена структура варианта КИМ: каждый вариант состоит из двух частей. Задания в варианте представлены в режиме сквозной нумерации без буквенных обозначений А, В, С. Изменена форма записи ответа на каждое из заданий 1–20: в КИМ 2015 г. требуется записывать цифру, соответствующую номеру правильного ответа.
Физика – ***содержательных изменений нет.***
Изменена структура варианта КИМ: каждый вариант состоит из двух частей. Задания в варианте представлены в режиме сквозной нумерации без буквенных обозначений А, В, С. Изменена форма записи ответа на каждое из заданий 1–16, 21, 22: в КИМ 2015 г. требуется записывать цифру, соответствующую номеру правильного ответа.

http://www.fipi.ru

Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ»

Справка о планируемых изменениях в КИМ ЕГЭ 2015 года

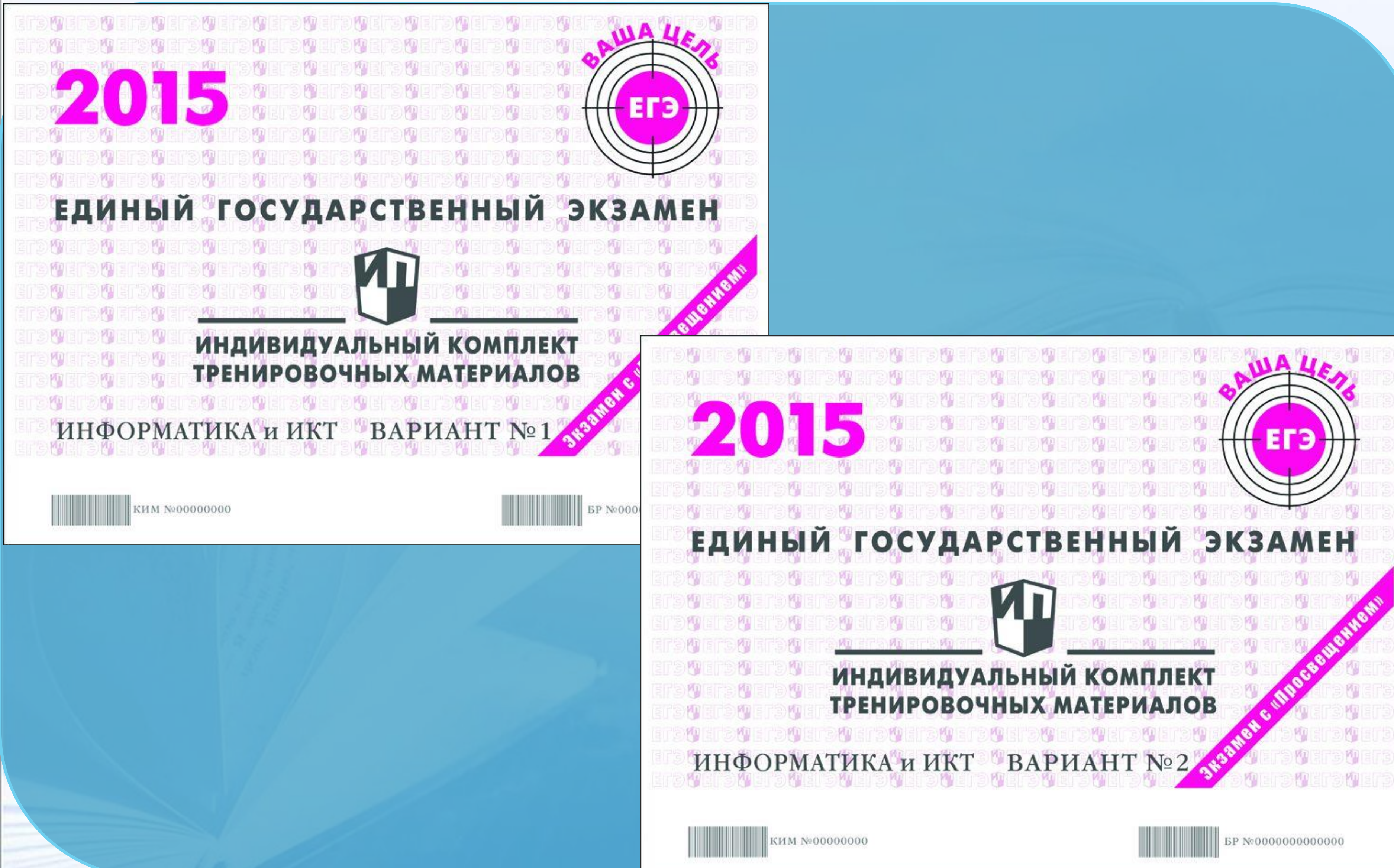
Общие изменения

1. Изменена структура варианта КИМ: каждый вариант состоит из двух частей (часть 1 - задания с кратким ответом, часть 2 - задания с развернутым ответом).
2. Задания в варианте КИМ представлены в режиме сквозной нумерации без буквенных обозначений А, В, С.
3. Изменена форма записи ответа в заданиях с выбором одного ответа: как и в заданиях с кратким ответом, записывается цифрой номер правильного ответа (а не крестик).
4. По большинству учебных предметов сокращено количество заданий с выбором одного ответа.
5. На основе анализа статистических данных о результатах экзамена и качестве КИМ в ряде предметов исключены некоторые линии заданий, изменена форма ряда заданий.
6. На постоянной основе ведется работа по совершенствованию критериев оценивания заданий с развернутым ответом.

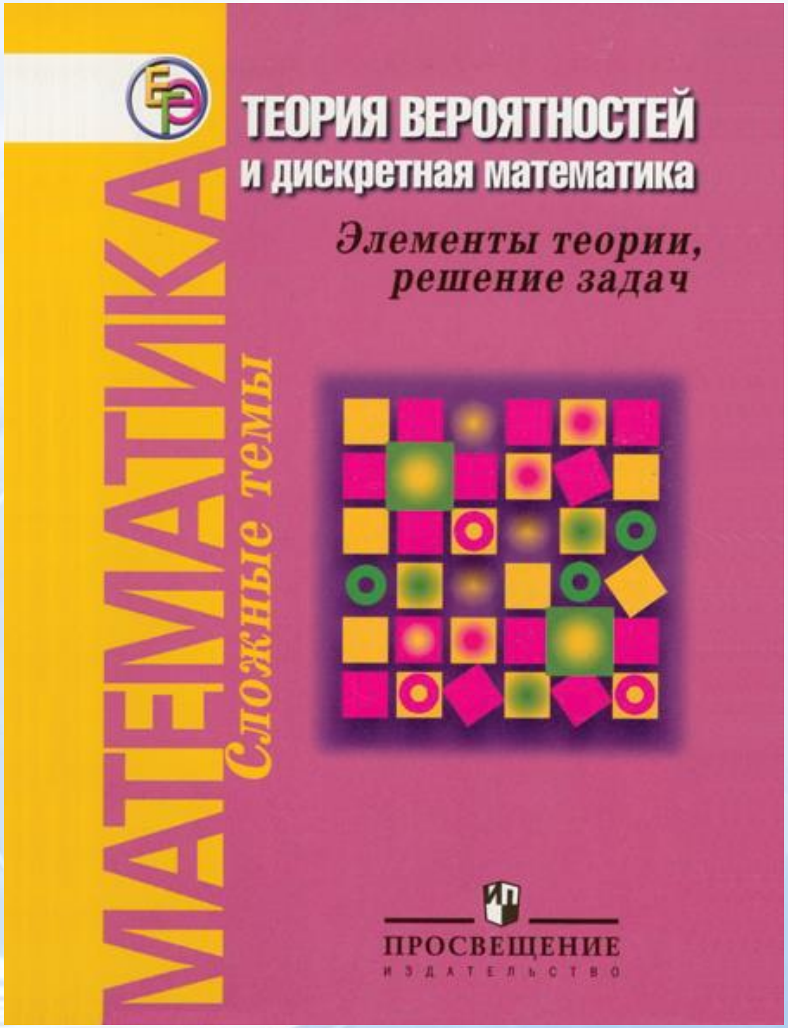
Математика – *разработана экзаменационная модель ЕГЭ базового уровня, а также модернизированная модель КИМ 2014 г.*

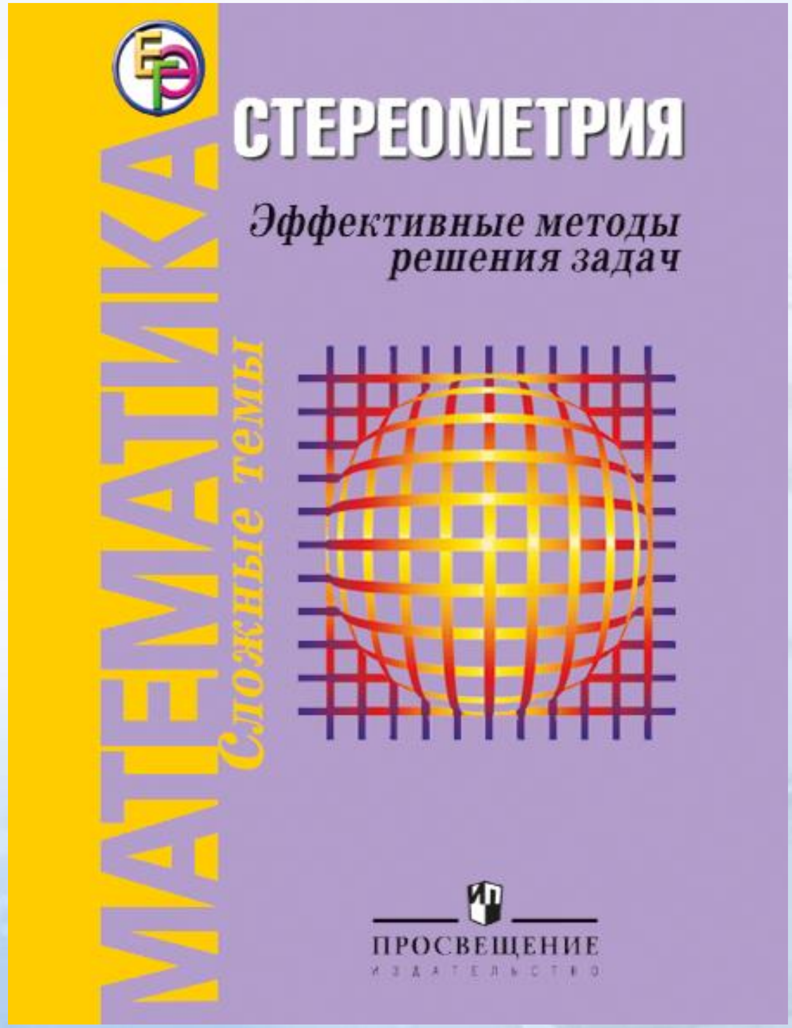
http://www.fipi.ru

Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ»



Серия «Сложные темы ЕГЭ»



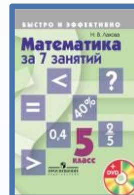


ПОСОБИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Серия «Элективные курсы»

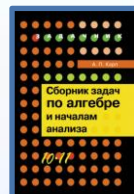
Серия «Профильная школа»

Серия «Решаем нестандартные задачи»



Серия «Быстро и эффективно»

Серия «Успешный старт»

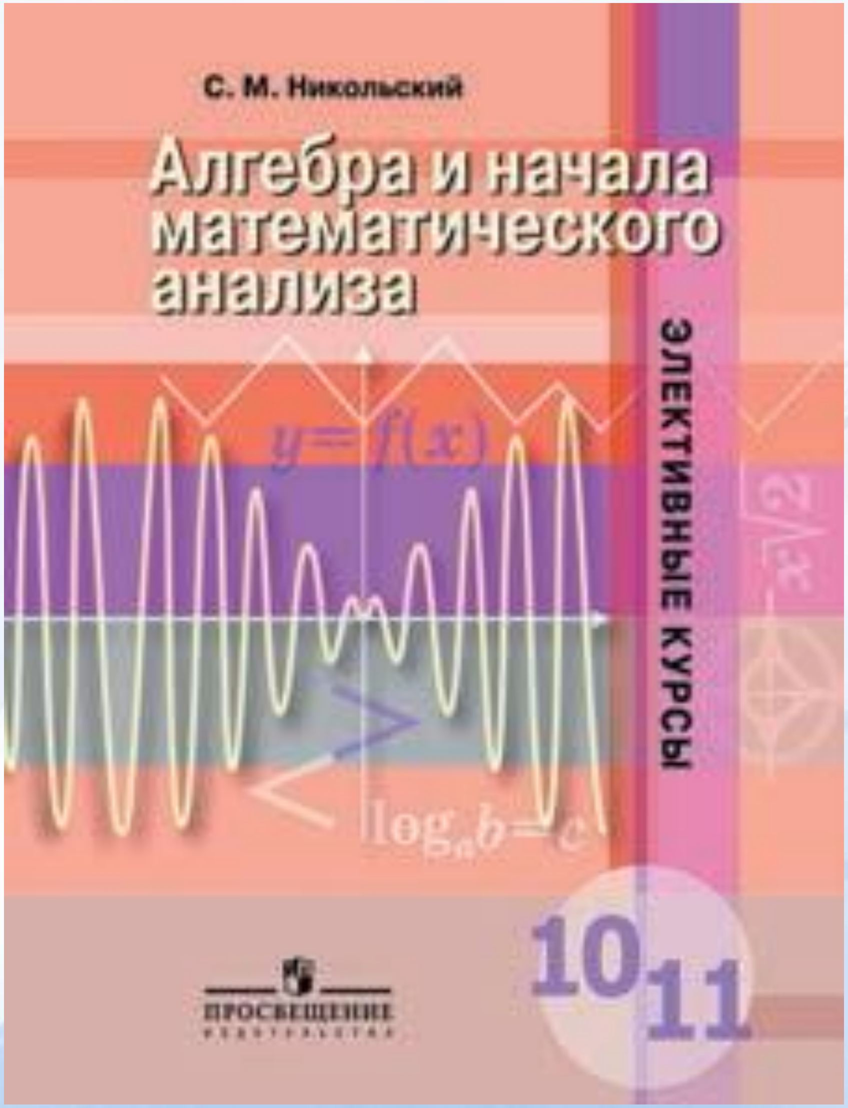


Серия «Задачник»

Серия «За страницами учебника математики»

Серия «Твой кругозор»

Серия «Элективные курсы»

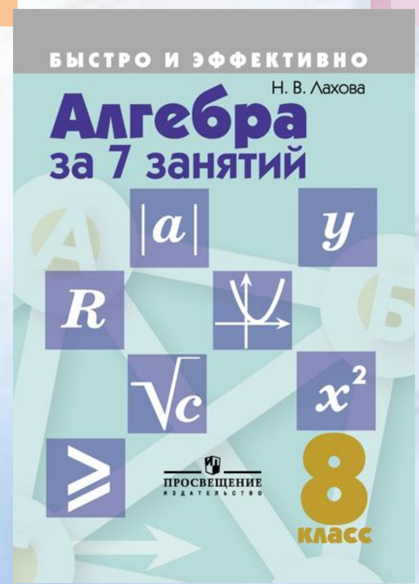


Серия «Профильная школа»

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

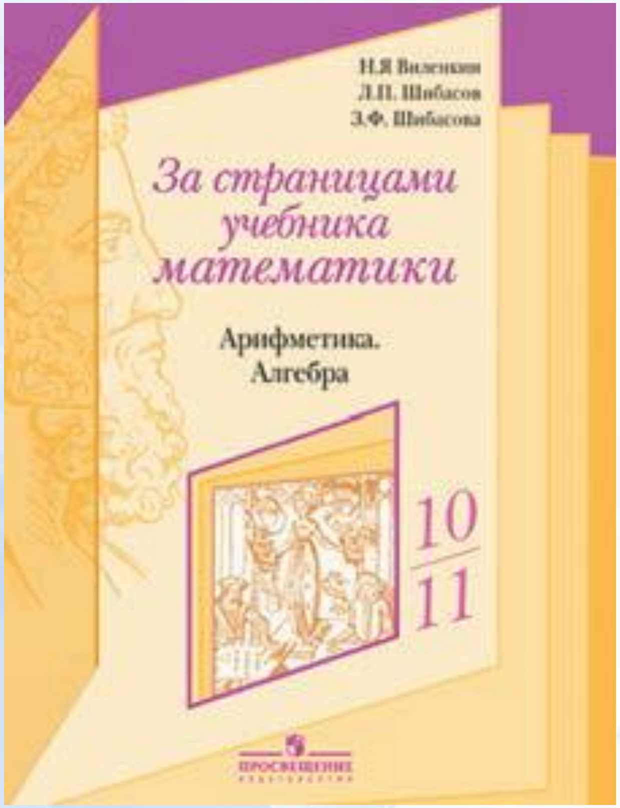
Серия «Успешный старт»

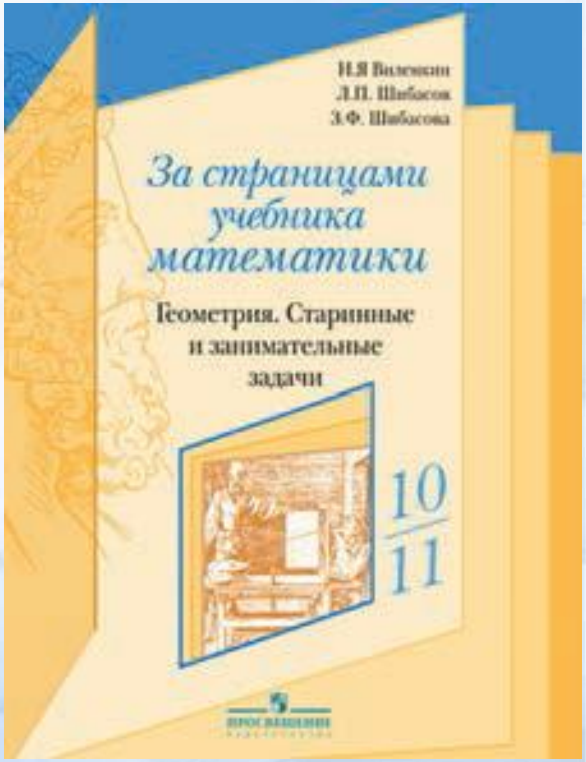
Серия «Быстро и эффективно»



Серия «Решаем нестандартные задачи»

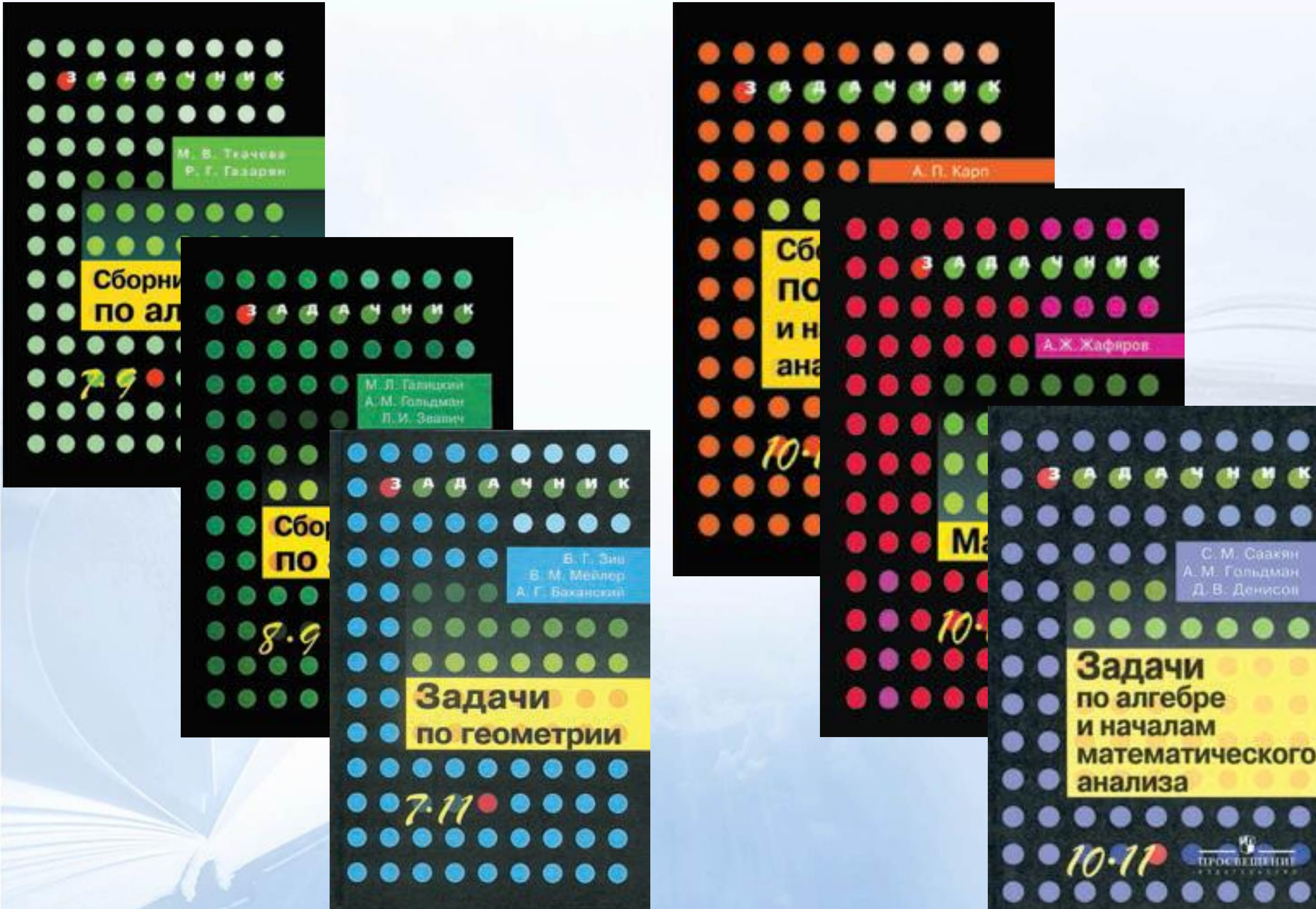
Серия «За страницами учебника математики»





85!
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Серия «Задачник»



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Пособия для учителей

Серия «Стандарты второго поколения»

Серия «Работаем по новым стандартам»

Серия «ФГОС: Оценка образовательных достижений»

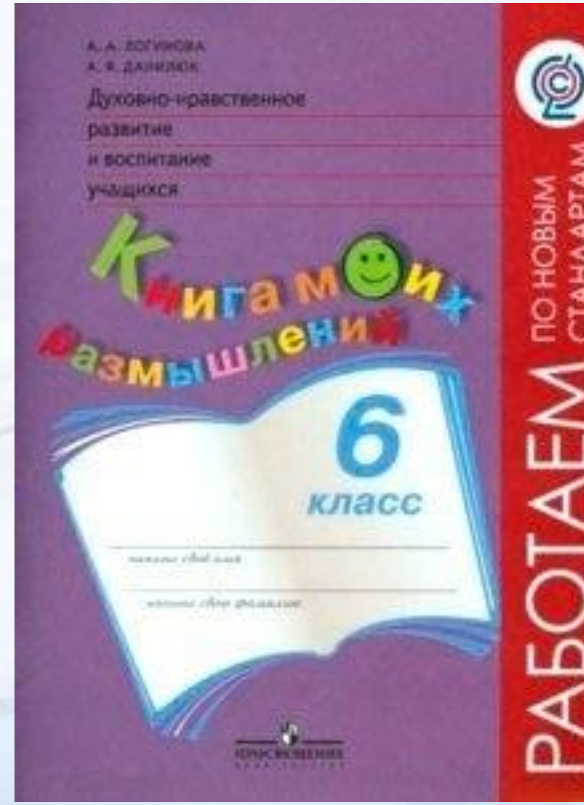
Серия «Стандарты второго поколения»

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Серия «Работаем по новым стандартам»

85! ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Серия «Работаем по новым стандартам»



По вопросам приобретения просьба обращаться:

ОПТОВЫЕ ЗАКУПКИ
За бюджетные средства или за безналичный расчёт от 25 экз.

Тел. 8(495)789-30-40
доб. 4144 или 4115
E-mail: gtrofimova@prosv.ru
E-mail: rea@prosv.ru

РОЗНИЧНЫЕ ЗАКУПКИ
В магазинах вашего города
или в интернет-магазинах
«Ozon.ru» (http://www.ozon.ru/), «Лабиринт» (http://www.labirint.ru/)

Если вы сделали заказ в книготорговой компании на продукцию издательства «Просвещение» и он не был выполнен в течении 5 дней, просьба сообщить об этом в издательство:
Тел.: 8(495)789-30-40 доб. 4075
E-mail: mbarsukova@prosv.ru

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Телефон: (495) 789-30-40
Internet: www.prosv.ru
e-mail: prosv@prosv.ru

Гриценко Николай Николаевич – ведущий методист информационно-методического отдела ЦФС

Телефон (495) 789-30-40 доб. 41-78
(906) 751-22-84 моб.

E-mail: NGritsenko@prosv.ru

Спасибо за внимание!

85!
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО